

AUSGEWÄHLTE POSITIVE UND NORMATIVE MESSKONZEPTE
DER VERTEILUNG

INAUGURAL - DISSERTATION
zur Erlangung des Grades Doctor rerum politicarum
(Dr. rer. pol.)
an der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Wolfgang Nierhaus

1981



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549025_0028

AUSGEWÄHLTE POSITIVE UND NORMATIVE MESSKONZEPTE
DER VERTEILUNG

INAUGURAL - DISSERTATION
zur Erlangung des Grades Doctor rerum politicarum
(Dr. rer. pol.)
an der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Wolfgang Nierhaus

1981



Referent:	Prof. Dr. U. Gruber
Korreferent:	Prof. Dr. F. E. Münnich
Promotionsabschlußberatung:	27. Juli 1981

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
1. Zielsetzung und Ergebnisse der Arbeit	1
2. Grundbegriffe und Definitionen	11
2.1. Ungeordnete und geordnete Verteilungen	11
2.2. Verteilungsmaße und Verteilungs- maßstäbe	16
3. Der Lorenz-Verteilungsmaßstab	21
3.1. Lorenz-Kurve und Lorenz-Maßstab	21
3.2. Eigenschaften des Lorenz-Maßstabes	26
3.3. Lorenz-Maßstab und transformierte Verteilungen	40
3.4. Ökonomische Anwendungen	47
4. Lineare Verteilungsmaßstäbe und Verteilungsmaße	55
4.1. Die Konstruktion linearer Maß- stäbe und Maße	55
4.2. Eigenschaften linearer Maßstäbe und Maße	63
4.3. Durchschnittsrelationen linearer Maßstäbe und der Lorenz-Maßstab	72

	<u>Seite</u>
5. Ausgewählte lineare Verteilungsmaße und Verteilungsmaßstäbe	85
5.1. Lineare Maße, Maßstäbe und Konzentrationsfläche	85
5.2. Die relative Spannweite	88
5.3. Die relative mittlere Abweichung	89
5.4. Der Gini-Koeffizient	93
5.5. Der Lorenz-Koeffizient	96
5.6. Die Maße von Eltetö-Frigyes und lineare Maße	98
6. Transfer-Maßstäbe	105
6.1. Der Pigou-Dalton Transfer-Maßstab	105
6.2. Der rangerhaltende Transfer-Maßstab	109
6.3. Der simultane Transfer-Maßstab	111
6.4. Transfer-Maßstäbe und der Lorenz-Maßstab	115
7. Ordinale bzw. semikardinale Verteilungs- maße	126
7.1. Das Konzept der sozialen Wohlfahrts- funktion	126
7.2. Utilitaristische Wohlfahrtsfunktionen	135
7.3. Paretianische Wohlfahrtsfunktionen	139
7.4. Konkave Wohlfahrtsfunktionen und Transferpräferenz	143

	<u>Seite</u>
8. Soziale Wohlfahrtsfunktionen als Grundlage normativer Verteilungsmaßstäbe	151
8.1. Eigenschaften normativer Verteilungsmaßstäbe	151
8.2. Durchschnittsrelationen normativer Verteilungsmaßstäbe und der Lorenz-Maßstab	154
9. Kardinale normative Verteilungsmaße	162
9.1. Dalton-Index und verallgemeinerter Dalton-Index	162
9.2. Atkinson-Index und Sen-Index	164
9.3. Der Kolm-Index	169
9.4. Die Beziehungen zwischen kardinalen normativen Verteilungsmaßen	170
10. Ausgewählte parametrisch spezifizierte Repräsentationen kardinaler, normativer Verteilungsmaße	175
10.1. Atkinson-Index und isoelastische Nutzenfunktionen	175
10.2. Kolm-Index und Nutzenfunktionen mit proportionaler Elastizität	187
10.3. Maxi-Min-Relation und utilitaristische Verteilungsmaßstäbe	199

	<u>Seite</u>
11. Lineare Verteilungsmaße und kompatible soziale Wohlfahrtsfunktionen	210
11.1. Kompatibilität und utilitaristische Wohlfahrtsfunktionen	210
11.2. Kompatibilität und paretianische Wohlfahrtsfunktionen	221
11.3. Kompatible Wohlfahrtsfunktionen und ihre Eigenschaften	226
Literaturverzeichnis	250
Verzeichnis häufig benutzter Symbole und Abkürzungen	258

1. Zielsetzung und Ergebnisse der Arbeit

Ziel der vorliegenden wirtschaftstheoretischen statischen Arbeit ist die Erstellung eines Kompendiums, das zweierlei versucht:

- Eigenschaften ausgewählter positiver wie normativer Meßkonzepte der Verteilung aufzuzeigen
- Beziehungen zwischen diesen Meßkonzepten herauszuarbeiten.

wir verwenden dabei einen ebenso einfachen wie auch universell verwendbaren Verteilungsbegriff: Wir definieren eine Verteilung des Einkommens (1) als n -dimensionalen Zeilenvektor mit ausschließlich nichtnegativen Komponenten (2). Sind diese nicht der Größe nach geordnet, so sprechen wir von einer ungeordneten Verteilung, andernfalls von einer geordneten Verteilung in Einzelwerten (3). Dabei lassen sich zwei Verteilungen hervorheben: Zum einen die extreme Gleichverteilung, bei der alle Komponenten identisch gleich dem Durchschnittseinkommen sind, und zum anderen die extreme Ungleichverteilung, bei der sich die gesamte Einkommenssumme auf eine Komponente konzentriert.

-
- (1) Die Ergebnisse dieser Arbeit liessen sich für andere Merkmale wie etwa Vermögen mühelos uminterpretieren.
 - (2) Unser Verteilungsvektor liesse sich durch Summation über die Zeilen der transponierten Krupp'schen Einkommensmatrix MY gewinnen.
Vgl. H.-J. Krupp, Theorie der personellen Einkommensverteilung, Duncker & Humblot, Berlin, 1968, S. 32 f.
 - (3) Wir betrachten also keine gruppierten Verteilungen, die durch theoretische Verteilungsfunktionen angenähert beschrieben werden könnten. Zu positiven Meßkonzepten, die auf diesem Ansatz beruhen, siehe etwa:
A. Peter, Die Messung der personellen Einkommensverteilung, Herbert Lang & Cie AG, Bern, 1969, S. 62 ff.

Zur Messung verwenden wir zwei unterschiedliche Konzepte. Einmal untersuchen wir binäre Ordnungsrelationen auf der Menge aller Verteilungsvektoren. Für zumindest reflexive wie auch transitive Relationen führen wir den Begriff "Verteilungsmaßstab" ein. Lassen sich alle Verteilungspaare miteinander vergleichen, so nennen wir den Maßstab vollständig, ansonsten unvollständig. Sind die Ordnungsrelationen dagegen transitiv und asymmetrisch, so verwenden wir die Bezeichnung "striktter Verteilungsmaßstab". Dabei können wir durch eine einfache Vorschrift aus jedem Maßstab einen strikten Maßstab ableiten. Die bei dieser Operation verbleibenden Verteilungspaare lassen sich in einer Äquivalenzrelation zusammenfassen.

Von diesem Konzept getrennt zu sehen (1) ist der Begriff eines "Verteilungsmaßes": Unter einem Verteilungsmaß verstehen wir eine reellwertige Funktion, die jedem Verteilungsvektor eine nichtnegative Maßzahl zuordnet. Je nach dem zugrundeliegenden Meßniveau können wir dabei zwischen ordinalen, semikardinalen und kardinalen Maßen unterscheiden.

Fortsetzung der Fußnote von Seite 1:

Normative Meßkonzepte, die auf diesem Ansatz beruhen, finden sich unter anderem bei:

J.S.Chipman, The Welfare Ranking of Pareto Distributions, *Journal of Economic Theory*, Vol. 9, 1974, S. 275-282

C.P.A.Bartels, Explicit Normative Measurement of the Degree of Income Inequality, *The Economist*, Vol. 125, 1977, S. 364 ff.

C.P.A.Bartels, Economic Aspects of Regional welfare, Income Distribution and Unemployment, Martinus Nijhoff, Leiden, 1977, S. 93 ff.

- (1) Diese Trennung ist jedoch nicht absolut zu sehen: Genügt die Ordnungsrelation zusätzlichen Regularitätsanforderungen, so ist die Konstruktion einer Funktion möglich, die die Relation vollständig beschreibt. Siehe dazu etwa: G.Debreu, Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, in: *Decision Processes*, Ed. by: R.M.Thrall, C.H.Coombs, R.L.Davis, John Wiley & Sons, New York, London, 1960, S. 159 ff.

Einen zentralen unvollständigen Verteilungsmaßstab bildet in dieser Arbeit der positive Lorenz-Maßstab (1). Ordnungskriterium ist die Beziehung, daß die Lorenz-Kurve einer Verteilung teilweise oder ganz überhalb der Lorenz-Kurve einer anderen Verteilung liegt oder aber mit ihr identisch ist. In Kapitel drei werden einige grundsätzliche Eigenschaften dieses Maßstabes herausgearbeitet. Zunächst ist die extreme Gleichverteilung größtes Element der Lorenz-Relation. Damit können wir den Lorenz-Maßstab als Paritäts-Maßstab interpretieren. Ein zweites Merkmal ist seine Invarianz bezüglich Permutationen des zugrundeliegenden Verteilungsvektors: Der Maßstab nimmt damit eine symmetrische oder auch unparteiliche Einstufung vor. Weiterhin ist er S-konkav, für alle Verteilungen mit der gleichen Merkmals-summe quasikonkav und sowohl global wie auch lokal gleichheitspräferierend.

Zwei weitere Abschnitte dieses Kapitels sind transformierten Verteilungsvektoren gewidmet. Um einen direkten Vergleich der transformierten Verteilungen auf der Grundlage des Lorenz-Maßstabes vornehmen zu können, müssen die verwendeten Transformationen freilich gewissen Regularitätsanforderungen genügen. Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich auch für Elastizitäten angeben. Ökonomische Anwendungsmöglichkeiten lassen sich dafür aus dem Bereich der Finanzwissenschaft finden: Progressive Steuertarife wirken nivellierend, regressive Tarife disparitätserhöhend, während proportionale Tarifsysteme keinerlei Auswirkungen auf die Ungleichheit haben. Unter zusätzlichen Voraussetzungen lassen sich auch zwei Tarifsysteme direkt miteinander vergleichen. Unsere Resultate setzen dabei weder differenzierbare noch stetige Steueraufkommensfunktionen voraus.

(1) Ausführliche Literaturverweisungen für diesen Begriff wie für die folgenden Konzepte finden sich in den entsprechenden Kapiteln.

Kapitel vier ist der Entwicklung linearer Meßkonzepte und ihren Eigenschaften vorbehalten. Grundlage ihrer Konstruktion bilden gewichtete Lorenz-Kurven-Differenzen. Damit können wir für alle linearen Ordnungsrelationen mit zumindest schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen die Ergebnisse des Lorenz-Maßstabes für Verteilungspaare mit der gleichen Merkmalssumme übertragen. Die Resultate für transformierte Verteilungen sind für lineare Maßstäbe richtig, deren Gewichtsfunktion strikt monoton wachsend ist.

Sind lineare Maßstäbe als Paritätsmaßstäbe zu interpretieren, so können wir im Gegensatz dazu lineare Maße als Disparitätsmaße auffassen, da sie für die extreme Gleichverteilung stets ihr Minimum annehmen. Sie sind ferner symmetrisch, da invariant bezüglich Permutationen des Verteilungsvektors, und homogen vom Grad Null, da invariant bezüglich proportionaler Einkommensänderungen. Sie genügen ferner den Eigenschaften der Konvexität, Quasikonvexität und S-Konvexität sowie der lokalen wie auch globalen Ungleichheitspräferenz.

In einem weiteren Abschnitt dieses Kapitels werden Durchschnittsrelationen linearer Maßstäbe betrachtet. Vermeiden sie einerseits die einseitige Bezugnahme auf einen Verteilungsmaßstab, so ist andererseits als Nachteil ihre Unvollständigkeit zu registrieren. An der "Grenze", d.h. bei Einbeziehung aller möglichen Maßstäbe in die Durchschnittsrelation, wird die Unvollständigkeit des Lorenz-Maßstabes erreicht: Die Durchschnittsrelation aller linearen Maßstäbe ist mit der Lorenz-Relation identisch. Diese Äquivalenz läßt sich auch für die Durchschnittsrelationen aller Maßstäbe mit ausschließlich schwach wachsenden Gewichtsfunktionen wie auch mit ausschließlich strikt wachsenden Gewichtsfunktionen nachweisen. Als Nebenergebnis zeigen wir

schließlich eine unmittelbare Äquivalenz zwischen einer höheren Lorenz-kurve und einem niedrigeren Grad der Disparität auf, sofern wir von einem linearen Verteilungsmaß mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion ausgehen.

In Kapitel fünf zeigen wir zunächst Zusammenhänge zwischen linearen Meßkonzepten und der Konzentrationsfläche auf: Jedes lineare Verteilungsmaß kann als spezifisch gewichtete Konzentrationsfläche interpretiert werden, während lineare Maßstäbe Verteilungspaare auf Grund gewichteter relativer Konzentrationsflächen zwischen den Lorenz-kurven der jeweiligen Verteilungen ordnen. Sodann demonstrieren wir, daß die relative mittlere Abweichung, die relative Spannweite und auch der Gini-Koeffizient in der Klasse linearer Verteilungsmaße enthalten sind. Ein weiteres lineares Maß erhalten wir mit dem Lorenz-Koeffizienten L_k , der sehr anschaulich interpretiert werden kann: Er gibt an, um wieviel Prozent die absolute Merkmalssumme verringert werden kann, wenn das Durchschnittseinkommen der Gesamtverteilung dem Durchschnittseinkommen der unteren k Einkommensbezieher entsprechen soll. Schließlich gehen wir auf die Beziehungen ein, die zwischen den Elteto-Frigyes Maßen einerseits und der relativen mittleren Abweichung und dem Lorenz-Koeffizienten andererseits bestehen.

Aus der Grundidee, positive Einkommenstransfers von reich zu arm als Motivation für soziale Präferenz heranzuziehen, konstruieren wir in Kapitel sechs je nach der speziellen Ausgestaltung der Transfers eine Reihe normativer unvollständiger Verteilungsmaßstäbe: Wir unterscheiden zwischen Pigou-Dalton Maßstab, rangerhaltendem Transfer-Maßstab sowie simultanen Transfer-Maßstab. Diese Unterscheidung ist jedoch rein technisch: Alle drei Maßstäbe, die wir

als unvollständige soziale Präferenzrelationen auffassen, sind einander äquivalent. Darüber hinaus ordnet der positive Lorenz-Maßstab die Ungleichheitsgrade von Verteilungen entsprechend der von den Transfer-Maßstäben ausgewiesenen Präferenz. Damit genügen der Lorenz-Maßstab sowie alle linearen Meßkonzepte mit strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktionen dem Dalton-Transfer-Kriterium: Jeder Transfer von reich zu arm wirkt eindeutig nivellierend. Für lineare Meßkonzepte mit lediglich schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen vergrößern derartige Transfers zumindest nicht die angezeigte Disparität.

In einem zweiten Analyseschritt unterstellen wir eine direkte funktionale Beziehung zwischen Einkommen und Wohlfahrt und erfassen die Wohlfahrtswirkungen der Einkommensverteilung durch soziale Wohlfahrtsfunktionen, die in dieser Arbeit stets symmetrisch, transferpräferenzierend und zumindest schwach monoton wachsend sind. Unter der zusätzlichen Annahme der Differenzierbarkeit läßt sich zeigen, daß der aus einer Erhöhung des i -ten Bezieher resultierende Wohlfahrtszuwachs der Wohlfahrtsänderung entspricht, die auf einen Einkommenszuwachs in gleicher Höhe des j -ten Bezieher zurückgeht, falls beide in der Ausgangssituation gleiche Einkommen aufweisen. In diesem Fall beträgt die marginale Substitutionsrate, die sich auch als Grenztransferrate interpretieren läßt, gerade Eins. Schließlich ist der marginale Wohlfahrtszuwachs unabhängig davon, welcher spezifische Einkommensbezieher ein vorgegebenes Einkommen bezieht. Alle drei Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Symmetrieannahme. Im Spezialfall homothetischer Wohlfahrtsfunktionen ist der geometrische Ort aller Punkte mit gleicher Grenzrate der Substitution eine Ursprungsgerade; die marginale Substitutionsrate selbst ist damit unabhängig von proportionalen Einkommensänderungen.

Legen wir dagegen Wert darauf, daß die Grenzrate der Substitution allein eine Funktion der beiden involvierten Einkommen ist, so implizieren wir damit utilitaristische Wohlfahrtsfunktionen, die sich als Summe individueller Nutzenfunktionen darstellen lassen. Erscheint uns die einfache Aufaddierung einzelner Nutzenfunktionen zu restriktiv und dehnen die Klasse sozialer Wohlfahrtsfunktionen auf nichtadditive Funktionen aus, so erhalten wir Wohlfahrtsfunktionen des paretianischen Typs. Da wir utilitaristische wie auch paretianische wohlfahrtsfunktionen als konkav definieren, muß gezeigt werden, daß konkave Funktionen auch transferpräferierend sind. Einen besonders eleganten Beweis erhalten wir im Falle der Differenzierbarkeit. Die Klasse transferpräferenzierender Funktionen läßt sich mühelos auf quasikonkave Wohlfahrtsfunktionen ausdehnen. Schließlich weisen wir nach, daß Transferpräferenz, lokale Gleichheitspräferenz und S-Konkavität äquivalente Konzepte sind.

Kapitel acht führt zunächst in die Konzeption normativer Verteilungsmaßstäbe auf der Grundlage sozialer Wohlfahrtsfunktionen ein. Utilitaristische Maßstäbe setzen bekanntlich lediglich die Vergleichbarkeit von Nutzendifferenzen voraus, ohne jedoch die Vergleichbarkeit der absoluten Nutzenniveaus zu verlangen. Darüber hinaus erfüllen sie die strikte Pareto-Bedingung. Weiterhin betrachten wir Durchschnittsrelationen normativer vollständiger Verteilungsmaßstäbe und erhalten ein kleines kompendium einander äquivalenter Durchschnittsrelationen. Zudem läßt sich zeigen, daß die durch den positiven Lorenz-Maßstab erhaltene Ordnung der Ungleichheitsgrade von Verteilungen den betrachteten sozialen Durchschnittspräferenzordnungen entspricht.

Soziale Wohlfahrtsfunktionen lassen sich schließlich zur Entwicklung strikt kardinaler normativer Verteilungsmaße heranziehen. Dabei ergeben sich, wie in Kapitel neun dargestellt, zwei Ansätze: Zum einen kann man das Wohlfahrtsniveau einer Verteilung zu demjenigen in Beziehung setzen, das sich bei einer Gleichverteilung der Merkmalssumme ergeben würde. Dieses erstmalig von Dalton eingeführte Konzept kann man entsprechend dem Vorgehen von Aigner und Heins auch auf nichtindividualistische Wohlfahrtsfunktionen ausdehnen. Zum anderen läßt sich, hierbei Atkinson, Kolm und Sen folgend, die absolute Merkmalssumme mit demjenigen Betrag vergleichen, der gleichverteilt gerade das Wohlfahrtsniveau der Ausgangsverteilung ergäbe. Diese beiden Konzepte sind jedoch nicht vollständig unabhängig voneinander: Der Dalton-Index läßt sich als eine umkehrbare Funktion des Atkinson-Index wie auch des Kolm-Index darstellen. Ferner kann man den verallgemeinerten Dalton-Index als eine Funktion des Sen-Index auffassen. Ist die zugrundegelegte Wohlfahrtsfunktion dabei homothetisch, so können wir auch die Umkehrfunktion explizit angeben.

Atkinson sowie Kolm entwickelten eine parametrisch spezifizierte Repräsentation ihrer Indizes, die exemplarisch in Kapitel zehn dargestellt werden. Neben bekannten Eigenschaften tragen wir Beweise nach, die in der Literatur nicht explizit geführt werden. Zunächst erhalten wir durch die Variation der jeweiligen Parameter ein breites Spektrum unterschiedlicher Darstellungen. Ferner läßt sich eine enge Verwandtschaft zwischen den beiden spezifizierten Indizes aufzeigen: Beide Maße können durch eine geeignete Transformation ineinander übergeführt werden. Schließlich betrachten wir Beziehungen, die sich zum Maxi-Min-Kriterium herstellen lassen.

Im Mittelpunkt des abschließenden elften Kapitels steht die Frage, welche Wertvorstellungen von linearen Verteilungsmaßen "impliziert" werden. Wir konkretisieren diese Fragestellung durch das Konzept kompatibler Wohlfahrtsfunktionen: Eine soziale Wohlfahrtsfunktion W ist genau dann mit einem linearen Maß G_g kompatibel, wenn die aus W und G_g abgeleiteten Ordnungsrelationen bezüglich aller Verteilungen mit der gleichen absoluten Merkmalssumme invers zueinander äquivalent sind. Durch ein "Unmöglichkeitstheorem" bestimmen wir zunächst eine Teilmenge linearer Maße, für die keine kompatible utilitaristische Wohlfahrtsfunktion existiert; darin enthalten sind Gini-Koeffizient und relative mittlere Abweichung. Weitet man die Klasse zulässiger Funktionen auf paretianische wohlfahrtsfunktionen aus, so lassen sich jedoch für diese beiden Maße kompatible Funktionen angeben.

In einem Darstellungssatz zeigen wir sodann, daß man jede kompatible Wohlfahrtsfunktion als eine Funktion der absoluten Merkmalssumme und des vorgegebenen linearen Verteilungsmaßes ausdrücken kann. Damit gleichbedeutend ist die Bedingung, daß das aus der Wohlfahrtsfunktion abgeleitete Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung sich als alleinige Funktion der Merkmalssumme und des linearen Maßes darstellen läßt. Die in dieser Klasse enthaltenen kompatiblen Wohlfahrtsfunktionen sind im allgemeinen aber nicht ordinal äquivalent. Mit anderen Worten: es lassen sich durchaus unterschiedliche Wertvorstellungen mit einem linearen Maß vereinbaren.

Ordinal unterschiedliche Wohlfahrtsfunktionen erhalten wir jedoch auch, wenn wir die Suche nach kompatiblen Funktionen auf homothetische, normierte Wohlfahrtsfunktionen beschränken. In diesem Fall kann man die Wohlfahrtsfunktion

bis auf eine Skalierungsfunktion H eindeutig als multiplikative Verknüpfung von absoluter Merkmalssumme und einer auf das Einheitsintervall normierten Funktion des linearen Maßes bestimmen. Eine ebenso äquivalente Bedingung ist, daß sich der aus der wohlfahrtsfunktion abgeleitete Sen-Index sich als eine umkehrbare Funktion des linearen Maßes darstellen läßt. Erst wenn diese gleich der identischen Abbildung ist, erhalten wir daraus eine Klasse ordinal äquivalenter, kompatibler Wohlfahrtsfunktionen. Als Indikator für ordinale Äquivalenz bietet sich das Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung an: Sind für zwei kompatible Wohlfahrtsfunktionen die betreffenden Äquivalenzeinkommen gleich, so sind die beiden Wohlfahrtsfunktionen ordinal äquivalent.

Anschließend stellen wir fest, daß kompatible Funktionen stets eingeschränkt quasikonkav sind. Für einen herausgegriffenen Spezialfall können wir die uneingeschränkte Konkavität nachweisen und analysieren ferner die Wirkungen marginaler Einkommensänderungen, wobei wir abschließend explizite Ergebnisse für die in Kapitel fünf betrachteten linearen Maße herleiten.

Zur Darstellung der Ergebnisse werden fast ausschließlich elementare mathematische Methoden benutzt. An einigen Stellen wurde die Analyse durch Diagramme ergänzt, um formale Ergebnisse zusätzlich zu veranschaulichen.

2. Grundbegriffe und Definitionen

2.1. Ungeordnete und geordnete Verteilungen

In der vorliegenden Arbeit wird unter einer ungeordneten Einkommensverteilung in Einzelwerten ein n -dimensionaler Zeilenvektor X verstanden, dessen Komponenten x_i alle reellwertigen nichtnegativen Werte annehmen können und die in der Regel nicht der Größe nach geordnet, also ungeordnet sind:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

$$x_i \geq 0 \text{ für } i = 1, 2, \dots, n$$

Damit erhalten wir als Menge aller zulässigen ungeordneten Einkommensverteilungen in Einzelwerten gerade den nichtnegativen Orthanten des n -dimensionalen euklidischen Raumes R_n^+ :

$$R_n^+ = \{X \mid X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)\}$$

Die i -te Komponente x_i einer Verteilung X gibt dabei das Einkommen des Beziehers i an (1).

Das arithmetische Mittel der n Komponenten ergibt das mittlere oder durchschnittliche Einkommen $m(X)$ einer Verteilung X :

$$\forall X \in R_n^+ : m(X) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n}$$

-
- (1) Der Verteilungsvektor X kann somit als Repräsentation der Querverteilung verstanden werden, bei der jeder Bezieher nur einmal mit seinem Gesamteinkommen erfasst wird. Mit Ausnahme des Abschnitts 3.4. steht es dem Leser zudem frei, X als primäre oder sekundäre Verteilung zu interpretieren. Zur begrifflichen Abgrenzung von Querverteilung, primärer und sekundärer Verteilung siehe:

U.Gruber, Einkommensverteilung, Langen Müller, München Wien, 1974, S. 13 ff.

Der Begriff "Bezieher" steht synonym für Personen bzw. Haushalte.

Die gesamte oder absolute Merkmalsumme $M(X)$ der Verteilung X erhält man dann als das n -fache des mittleren Einkommens $m(X)$:

$$\begin{aligned} \forall X \in R_n^+ : M(X) &= nm(X) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Unter einer Permutationsmatrix Π verstehen wir eine quadratische Matrix der Dimension $n \times n$, deren Elemente aus Nullen und Einsen bestehen, wobei Zeilen- und Spaltensummen ebenfalls Eins betragen müssen (1). Wendet man eine so definierte Permutationsmatrix Π auf einen Verteilungsvektor X an, so wird die Reihenfolge der Komponenten verändert. Formal erhalten wir die permutierte Verteilung $X\Pi$ mit:

$$X\Pi = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_j}, \dots, x_{i_n})$$

Durch diese Permutation werden die Einkommen neuen Beziehern zugeordnet. Der Empfänger j bezieht also nicht mehr das Einkommen x_j sondern vielmehr x_{i_j} . Ein Beispiel mag diesen Sachverhalt verdeutlichen:

Wenden wir die Matrix Π mit:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) Zum Begriff einer Permutationsmatrix siehe auch:

A.K.Sen, On Economic Inequality, Oxford, Clarendon Press, 1973, S. 55 f.

Weiterhin sei auf Abschnitt 3.2. dieser Arbeit verwiesen.

auf den Verteilungsvektor $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ an, so erhalten wir die permutierte Verteilung XII mit:

$$XII = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-1}}, x_{i_n}) = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1)$$

deren Komponenten in der genau umgekehrten Reihenfolge im Vergleich zur Ausgangsverteilung X angeordnet sind.

Mit Hilfe von Permutationsmatrizen lassen sich die Komponenten eines Verteilungsvektors X auch der Größe nach ordnen. Wir bezeichnen mit $\Pi(X)$ eine Permutationsmatrix, die solches leistet. Wenden wir $\Pi(X)$ auf X an, so nennen wir die daraus entstehende Permutation geordnete Verteilung in Einzelwerten:

$$XII(X) = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) \text{ mit } x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n}$$

Nun können durchaus mehrere Komponenten eines Vektors X einander gleich sein (1). Ist dies der Fall, so existieren im allgemeinen auch mehrere Permutationsmatrizen $\Pi(X)$. Führen wir zur Illustration den ungeordneten Vektor

$$X = (2, 4, 2)$$

ein, so läßt sich dieser sowohl durch die Matrix

$$\Pi(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

als auch durch die Permutationsmatrix

$$\tilde{\Pi}(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) In der Theorie der geordneten Statistiken spricht man in diesem Fall von Bindungen. Diesem Sprachgebrauch schließen wir uns in der vorliegenden Arbeit an. Zum Bindungsbegriff siehe: H. Büning und G. Trenkler, Nichtparametrische statistische Methoden, de Gruyter, Berlin, New York, 1978, S. 55f.

in die der Merkmalsgröße nach geordnete Verteilung

$$XII(X) = (2, 2, 4) = \widetilde{XII}(X)$$

überführen. Für den weiteren Gang der Arbeit ist es unerheblich, von welcher Permutationsmatrix $\Pi(X)$ im speziellen Fall jeweils ausgegangen wird.

Für eine der Größe nach geordnete Einkommensverteilung in Einzelwerten wollen wir eine eigene Schreibweise einführen:

$$XII(X) = X^0 = (x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(i)}, \dots, x_{(n)})$$

Hierbei gibt der Index i von $x_{(i)}$ die Platznummer oder auch Rang der Komponente $x_{(i)}$ innerhalb der geordneten Verteilung X^0 an. Mit dieser neuen Begriffsbildung ist auch ein Informationsverlust verbunden: Bei vorliegender geordneter Verteilung X^0 ist nicht mehr ersichtlich, von welchem Bezieher die i -kleinste Komponente $x_{(i)}$ her stammt.

Treten in der ungeordneten Verteilung Bindungen auf, so können die Ränge offensichtlich nicht mehr eindeutig gebildet werden. In diesem Fall ordnen wir die Platznummern willkürlich zu. Die dadurch auftretenden Unbestimmtheiten sind für weiteren Ausführungen ohne Belang (1).

-
- (1) Treten keine Bindungen auf, so läßt sich eine geordnete Verteilung in Einzelwerten als eine rudimentäre Form der personellen Einkommensverteilung auffassen:

"Unter personeller Verteilung versteht man üblicherweise die Verteilung nach Einkommensgrößenklassen oder Einkommensschichten. Die Einkommensbezieher werden hierbei nach ihrer Einkommenshöhe in Einkommensgrößenklassen aufgeteilt."

U.Gruber, Einkommensverteilung, a.a.O., S. 14

Invariant bezüglich aller möglichen Permutationsmatrizen ist die sogenannte "extreme" Gleichverteilung X_g . Ausgehend von einer beliebigen ungeordneten Verteilung X mit der absoluten Merkmalssumme $M(X)$ verstehen wir unter der extremen Gleichverteilung X_g eine Verteilung, bei der jeder Bezieher gerade das Durchschnittseinkommen $m(X)$ empfängt (1):

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : X_g = (m(X), m(X), \dots, m(X))$$

Offensichtlich folgt für alle Permutationsmatrizen Π :

$$X_g \Pi = X_g$$

Damit ist für die extreme Gleichverteilung die Unterscheidung geordnet/ungeordnet ohne Belang, d.h. $X_g^O = X_g$.

Dies gilt jedoch nicht für ihr Gegenteil, der "extremen" Ungleichverteilung X_u , bei der $n-1$ Bezieher ein Einkommen von Null und ein Bezieher die Merkmalssumme $M(X)$ einer beliebigen Ausgangsverteilung X empfangen:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : X_u = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

$$x_i = M(X) \text{ und } x_j = 0 \text{ für } j = 1, \dots, n \\ j \neq i$$

Die geordnete extreme Ungleichverteilung X_u^O erhält man dann durch Anwendung der Permutationsmatrix $\Pi(X_u)$:

$$X_u \Pi(X_u) = X_u^O = (0, 0, \dots, 0, M(X))$$

(1) Zum Begriff der extremen Gleich- bzw. Ungleichverteilung siehe auch:

A. Piesch, Statistische Konzentrationsmaße, J.C.B. Mohr, (Paul Siebeck), Tübingen, 1975, S. 7 f.

2.2. Verteilungsmaße und Verteilungsmaßstäbe

In der vorliegenden Arbeit unterscheiden wir strikt zwischen Verteilungsmaßen und Maßstäben, wobei wir erstere als reellwertige Funktionen, letztere hingegen als Ordnungsrelationen auffassen. Im einzelnen verwenden wir die nachfolgenden begrifflichen Abgrenzungen:

Def.: Ein Verteilungsmaßstab ist eine binäre (schwache) Ordnungsrelation R auf der Menge $\mathbb{R}_n^+$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Reflexivität: $\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : R(X, X)$

- Transitivität: $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}_n^+ :$

$$R(X, Y) \text{ und } R(Y, Z) \implies R(X, Z)$$

Dabei ist die Schreibweise $R(X, Y)$ eine Abkürzung für die Aussage: Verteilung X steht zur Verteilung Y in der Relation R . Da wir eine Relation als Teilmenge R geordneter Verteilungspaare des kartesischen Produkts $\mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_n^+$ auffassen können (1), so ist die Aussage $R(X, Y)$ genau dann wahr, wenn das geordnete Verteilungspaar (X, Y) Element der Menge R ist.

Nun kann es durchaus Verteilungspaare geben, für die weder die Aussage $R(X, Y)$ noch die Aussage $R(Y, X)$ wahr ist. Mit Hilfe des vorliegenden Verteilungsmaßstabes R sind diese Verteilungen offensichtlich unvergleichbar. Einen solchen Maßstab, der "Lücken" aufweist, bezeichnen wir als unvollständigen Verteilungsmaßstab oder auch als Quasiordnung (2).

(1) Zum Begriff einer binären Relation siehe auch:

A.K.Sen, Collective Choice and Social Welfare, Holden-Day, San Francisco, 1970, S. 7 ff.

(2) Die Verwendung von Quasiordnungen, aber auch anders ausgestalteter Ordnungsrelationen geht auf Sen zurück. Vgl. A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S.4 ff.

Ist das vom Verteilungsmaßstab R gezeichnete Bild hingegen "lückenlos", so nennen wir R vollständig:

Def.: Ein Verteilungsmaßstab R heißt vollständig, wenn:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: R(X, Y) \text{ und/oder } R(Y, X)$$

Für einen vollständigen Verteilungsmaßstab verwenden wir synonym den Begriff Ordnung.

Davon getrennt zu sehen ist das Konzept eines strikten Verteilungsmaßstabes:

Def.: Ein strikter Verteilungsmaßstab ist eine binäre (strikte) Ordnungsrelation P auf der Menge $\mathbb{R}_n^+$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Asymmetrie: $\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: P(X, Y) \implies \text{nicht } P(Y, X)$
- Transitivität: $\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}_n^+:$

$$P(X, Y) \text{ und } P(Y, Z) \implies P(X, Z)$$

Die Schreibweise $P(X, Y)$ steht dabei stellvertretend für: Verteilung X steht zur Verteilung Y in der strikten Ordnungsrelation P .

Einen strikten Verteilungsmaßstab P bezeichnen wir auch als strikte partielle Ordnung. Er ist asymmetrisch und kann daher nicht reflexiv sein: Setzen wir $x = X$ und nehmen an, $P(X, X)$ sei wahr, so implizierte die Asymmetrie von P die widersprüchliche Aussage "nicht $P(X, X)$ ". Das geordnete Paar (X, X) ist offensichtlich unvergleichbar, woraus wir schließen dürfen, daß jeder strikte Maßstab nicht nur nicht reflexiv sondern auch unvollständig ist.

Aus jedem beliebigen vollständigen wie auch unvollständigen Verteilungsmaßstab R läßt sich ein strikter Verteilungsmaßstab P nach der Vorschrift:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_n^+: P(x, y) \iff R(x, y) \text{ und nicht } R(y, x)$$

ableiten. Die "verbleibenden" Verteilungspaare fassen wir in der Äquivalenzrelation I zusammen:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_n^+: I(x, y) \iff R(x, y) \text{ und } R(y, x)$$

Der so definierte strikte Maßstab P ist offensichtlich transitiv und asymmetrisch:

Zunächst ist " $P(x, y)$ und $P(y, z)$ " äquivalent mit:

"($R(x, y)$ und nicht $R(y, x)$) und ($R(y, z)$ und nicht $R(z, y)$)", was $R(x, z)$ impliziert, da R transitiv ist. Nun kann $P(x, z)$ nur dann falsch sein, wenn zugleich $R(z, x)$ gilt. Aus $R(z, x)$ folgt aber zusammen mit $R(x, y)$ und der Transitivität von R unmittelbar $R(z, y)$, was im Widerspruch zu "nicht $R(z, y)$ " steht. Damit muß aber "nicht $R(z, x)$ " richtig sein, was zusammen mit $R(x, z)$ die gesuchte Aussage $P(x, z)$ impliziert.

Für den Beweis der Asymmetrie gehen wir von der gegenteiligen Aussage aus und nehmen an, es könne zugleich $P(x, y)$ und $P(y, x)$ gelten. Nun ist $P(y, x)$ äquivalent mit " $R(y, x)$ und nicht $R(x, y)$ ", was der Voraussetzung $P(x, y)$ widerspricht. Also impliziert $P(x, y)$ stets "nicht $P(y, x)$ ", was zu beweisen war.

Die Äquivalenzrelation I ist transitiv und reflexiv:

Gehen wir von " $I(x, y)$ und $I(y, z)$ " aus, so folgt daraus: " $(R(x, y) \text{ und } R(y, z)) \text{ und } (R(z, y) \text{ und } R(y, z))$ ". Die Transitivität von R impliziert dann " $R(x, z)$ und $R(z, x)$ ", woraus definitionsgemäß $I(x, z)$ folgt.

Die Reflexivität von I ergibt sich schließlich unmittelbar aus der Reflexivität der Relation R .

Wenden wir uns nun den Verteilungsmaßen zu:

Def.: Ein Verteilungsmaß ist eine Funktion f , die jedem beliebigen Verteilungsvektor $X \in \mathbb{R}_n^+$ eine reellwertige nichtnegative Zahl $f(X)$ zuordnet:

$$f: \mathbb{R}_n^+ \ni X \longrightarrow f(X) \in \mathbb{R}_1^+$$

Je nach dem zugrundegelegten Meßniveau können wir dabei zwischen ordinalen, semikardinalen und kardinalen Maßen unterscheiden:

a) Ordinales Meßniveau (Ordinalskala):

Wir sprechen von einem ordinalen Maß f , wenn f eindeutig bis auf strikt monoton wachsende Transformationen $\varphi(\cdot)$ bestimmt ist (1). Die Abstände zwischen den zugewiesenen Maßwerten haben keinerlei Informationswert, ebensowenig die aus ordinalen Maßwerten gebildeten Quotienten.

b) Semikardinales Meßniveau (Intervallskala):

Ein Maß f heißt semikardinal, wenn f eindeutig bis auf positive lineare Transformationen $a+b(\cdot)$ mit $b>0$ bestimmt ist (2). Wir erhalten folgende charakteristische Eigenschaften (3):

- Bei positiven linearen Transformationen bleibt der Nullpunkt nicht fest.

-
- (1) Eine Funktion $\varphi(f)$ ist eine strikt monoton wachsende Transformation von f , wenn aus $f(X)>f(Y)$ die Ungleichung $\varphi(f(X))>\varphi(f(Y))$ folgt.
 - (2) In der ökonomischen Literatur wird zumeist Kardinalität mit der hier eingeführten Definition der Semikardinalität gleichgesetzt. Siehe hierzu: A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 4 bzw. A.K.Sen, Collective Choice and Social Welfare, a.a.O., S. 105
 - (3) Vgl. H.Büning und G.Trenkler, Nichtparametrische statistische Verfahren, a.a.O., S. 22

- Der Quotient zweier Maßwerte ist variant bezüglich positiver linearer Transformationen:

$$\frac{a+bf(X)}{a+bf(Y)} = \frac{f(X)}{f(Y)}$$

- Der Quotient aus zwei Differenzen semikardinaler Maßwerte bleibt bei positiven linearen Transformationen erhalten:

$$\frac{a+bf(X) - (a+bf(Y))}{a+bf(Y) - (a+bf(Z))} = \frac{f(X) - f(Y)}{f(Y) - f(Z)}$$

Damit sind also Verhältnisse von Differenzen semikardinaler Maßwerte sinnvoll interpretierbar, während dies für Verhältnisse semikardinaler Maßwerte selbst unzulässig ist.

c) Kardinales Meßniveau (Verhältnisskala):

Ein Maß f heißt kardinal, wenn die Menge der zulässigen Transformationen auf Funktionen der Form bf mit $b > 0$ beschränkt ist. Hierbei läßt sich feststellen (1):

- Existiert ein $X \in R_n^+$ mit $f(X) = 0$, so ist dieser Nullpunkt invariant.
- Verhältnisse kardinaler Maßwerte können sinnvoll gebildet werden. Evaluieren wir ein kardinales Maß für zwei beliebige Verteilungen X und Y , so bleibt die Aussage "Der Maßwert $f(X)$ beträgt das β -fache des Maßwertes $f(Y)$ " richtig, ob wir nun von f selbst oder von einer beliebigen Transformation bf ausgehen.

(1) Vgl. H.Büning und G.Trenkler, „Nichtparametrische statistische Verfahren, a.a.O., S. 22 f.

3. Der Lorenz-Verteilungsmaßstab

3.1. Lorenz-Kurve und Lorenz-Maßstab

Zur Darstellung der Lorenz-Kurve gehen wir von einer ungeordneten Verteilung in Einzelwerten aus:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Wenden wir auf X die Permutationsmatrix $\Pi(X)$ an, so erhalten wir die der Merkmalsgröße nach geordnete Verteilung X^0 mit (1):

$$\Pi(X) = X^0 = (x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(i)}, \dots, x_{(n)})$$

Der Index i gibt dabei nicht nur den Rang der Komponente $x_{(i)}$ an, sondern auch die absolute Anzahl der Bezieher, deren Einkommen Rangzahlen aufweisen, die kleiner oder gleich i sind. Entsprechend dieser Feststellung erhalten wir mit $\frac{i}{n} = p_i$ die relative Anzahl der gemäß ihrer Rangzahlen von "unten" her kumulierten Merkmalsträger.

Treten in der ungeordneten Verteilung X keine Bindungen auf, so können wir die p_i -Werte zusätzlich als relative Häufigkeiten derjenigen Merkmalswerte interpretieren, die kleiner bzw. gleich $x_{(i)}$ sind.

Summiert man über die der Größe nach geordneten Merkmalsbeträge, so erhält man durch die Funktion

$$s_X: [0,1] \ni p_i \longrightarrow \sum_{j=1}^i x_{(j)} \in \mathbb{R}_1^+$$

die gesamte Einkommenssumme, die der p_i -te Teil der von

(1) Zu diesem Verfahren siehe Abschnitt 2.1. dieser Arbeit.

unten kumulierten Merkmalsträger empfängt.

Beziehen wir die Funktionswerte $s_X(p_i) = \sum_{j=1}^i x(j)$ auf die gesamte Merkmalssumme $M(X)$, so ergibt sich mit dem Ausdruck $L_X(p_i) = M(X)^{-1} s_X(p_i)$ die relative Einkommenssumme des p_i -ten Teils der von unten kumulierten Bezieher.

Dies gibt Anlaß zu der folgenden Definition (1):

Def.: Die Lorenz-Kurve einer Verteilung X wird durch die Funktion

$$L_X: [0,1] \ni p_i \longrightarrow L_X(p_i) \in [0,1]$$

erklärt.

Fiesch schreibt dazu (2):

"An der Lorenzkurve läßt sich ablesen, welcher Prozentsatz der Merkmalssumme jeweils auf die p_i % kleinsten oder $(1-p_i)$ % größten Merkmalsträger entfällt. Umgekehrt läßt sich bei gegebenem Anteil der Merkmalssumme $L_X(p_i)$ oder $(1-L_X(p_i))$ der zugehörige Anteil der Merkmalsträger ermitteln."

(1) Vgl. damit die Definitionen von Schaich und Fiesch:

E.Schaich, Lorenzfunktion und Gini-Koeffizient in kritischer Betrachtung, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Band 185, 1971, S. 195

W.Piesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 37

Zu Lorenz-Kurven gruppierter Verteilungen siehe etwa:

J.L.Gastwirth, A General Definition of the Lorenz Curve, Econometrica, Vol. 39, 1971, S. 1037

W.Piesch, Lorenzkurve und inverse Verteilungsfunktion, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Band 185, 1971, S. 14 ff.

W.Piesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 22 ff.

E.Schaich, Lorenzfunktion und Gini-Koeffizient in kritischer Betrachtung, a.a.O., S. 194 f.

Betrachten wir die Bezeichnung $s_X(p_i) = \sum_{j=1}^i x(j)$,
so folgt daraus:

$$L_X(p_i) = n(X)^{-1} \sum_{j=1}^i x(j)$$

Leitieren wir die erste Differenz DL_X mit:

$$\begin{aligned} DL_X(p_i) &= L_X(p_i) - L_X(p_{i-1}) \\ &= n(X)^{-1} x(i) \end{aligned}$$

so erhalten wir die äquivalente Darstellung:

$$L_X(p_i) = \sum_{j=1}^i DL_X(p_j)$$

Schließlich geben wir für die extreme Gleich- bzw. Ungleichverteilung die zugehörigen Lorenz-Kurven an:

Für die extreme Gleichverteilung X_g folgt:

$$L_{X_g}(p_i) = p_i \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n$$

Für die Ungleichverteilung X_u erhalten wir:

$$\begin{aligned} L_{X_u}(p_i) &= 0 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ L_{X_u}(p_n) &= 1 \end{aligned}$$

Fortsetzung der Fußnote von Seite 22:

Eine von diesen Autoren abweichende Darstellung von Lorenz-Kurven gruppierter Verteilungen findet sich in:

N.S. Azkawi und N. Podder, Efficient Estimation of the Lorenz Curve and Associated Inequality Measures from Grouped Observations, Econometrica, Vol. 44, 1976, S. 138 f.

(2) H. Biesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 37. Angleichung an die benutzte Terminologie der Verfasser.

Nach diesen Vorarbeiten können wir nun den von Sen bzw. Rothschild und Stiglitz 1973 explizit formulierten Lorenz-Verteilungsmaßstab R_L definieren (1):

Def.: Der positive Lorenz-Maßstab R_L ist eine Ordnungsrelation, die durch die Vorschrift:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : R_L(X, Y) \iff \forall p_i : L_X(p_i) - L_Y(p_i) \geq 0$$

generiert wird.

Damit steht also eine Verteilung X zu einer Verteilung Y genau dann in der Lorenz-Relation R_L , wenn ihre Lorenz-Kurve teilweise oder ganz überhalb der Lorenz-Kurve der Verteilung Y liegt oder aber mit ihr vollständig identisch ist.

Der so definierte Lorenz-Maßstab R_L ist reflexiv und transitiv. Zunächst gilt für alle Verteilungen $X \in \mathbb{R}_n^+$:

$$\forall p_i : L_X(p_i) - L_X(p_i) \geq 0$$

was $R_L(X, X)$ impliziert, womit die Reflexivität von R_L nachgewiesen wäre. Ferner folgt aus:

$$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}_n^+ : R_L(X, Y) \text{ und } R_L(Y, Z)$$

$$\text{unmittelbar: } \forall p_i : L_X(p_i) - L_Y(p_i) \geq 0$$

$$\forall p_i : L_Y(p_i) - L_Z(p_i) \geq 0$$

woraus sich zusammen mit der Transitivität der "größer-als-oder-gleich" Relation ($\geq$) das gesuchte Resultat:

$$\forall p_i : L_X(p_i) - L_Z(p_i) \geq 0$$

und damit $R_L(X, Z)$ ergibt, was zu beweisen war.

(1) Vgl. A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 63 f. und: M.Rothschild und J.E.Stiglitz, Some Further Results on the Measurement of Inequality, Journal of Economic Theory, Vol. 6, 1973, S. 189 f.

Der Lorenz-Maßstab R_L ist jedoch unvollständig: Unvergleichbar im Sinne des Lorenz-Maßstabes sind alle Verteilungen, deren Lorenz-Kurven sich schneiden.

Aus dem Lorenz-Maßstab R_L läßt sich ein strikter Lorenz-Maßstab P_L ableiten:

Def.: Der strikte Lorenz-Maßstab P_L ist eine strikte Ordnungsrelation, die nach der Vorschrift:

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in R_n^+ : P_L(X, Y) &\iff R_L(X, Y) \text{ und nicht } R_L(Y, X) \\ &\iff \begin{cases} \forall p_i : L_X(p_i) - L_Y(p_i) \geq 0 \\ \exists p_i : L_X(p_i) - L_Y(p_i) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

gebildet wird.

Liegt die Lorenz-Kurve einer Verteilung X also mindestens an einer Stelle strikt überhalb der Lorenz-Kurve einer Verteilung Y , so steht X zur Verteilung Y in der strikten partiellen Lorenz-Ordnung P_L . Diese ist transitiv und asymmetrisch, wie sich aus der Bildungsvorschrift unmittelbar ergibt (1).

Schließlich können wir eine Lorenz-Äquivalenzrelation I_L deduzieren:

$$\begin{aligned} \text{Def.: } \forall X, Y \in R_n^+ : I_L(X, Y) &\iff R_L(X, Y) \text{ und } R_L(Y, X) \\ &\iff \forall p_i : L_X(p_i) - L_Y(p_i) = 0 \end{aligned}$$

Die Aussage $I_L(X, Y)$ ist genau dann wahr, wenn die beiden Lorenz-Kurven L_X und L_Y identisch sind.

(1) Vgl. dazu Abschnitt 2.2. dieser Arbeit und:

A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 48 f. und S. 63 f.

3.2. Eigenschaften des Lorenz-Maßstabes

In diesem Abschnitt sollen einige grundlegende Eigenschaften des Lorenz-Maßstabes herausgearbeitet werden. Wir halten zunächst fest:

Satz: Die Gleichverteilung X_g ist größtes Element (1) von R_n^+ bezüglich der Lorenz-Relation R_L , d.h. es gilt:

$$\forall X \in R_n^+ \implies R_L(X_g, X)$$

Mit anderen Worten: Die extreme Gleichverteilung steht zu allen anderen Verteilungen in der Lorenz-Relation.

Beweis: Der Beweis ist trivial für den Fall $X = X_g$. Aus der Reflexivität der Lorenz-Relation folgt nämlich unmittelbar $R_L(X_g, X_g)$.

Für alle anderen Verteilungen $X \neq X_g$ führen wir nun die Differenzenfunktion VL_X ein mit:

$$\begin{aligned} VL_X(p_i) &= L_{X_g}(p_i) - L_X(p_i) \\ &= \sum_{j=1}^i M(X)^{-1} (m(X) - x_{(j)}) \end{aligned}$$

Da sich die erste Differenz DVL_X der Funktion VL_X mit:

$$\begin{aligned} DVL_X(p_i) &= VL_X(p_i) - VL_X(p_{i-1}) \\ &= M(X)^{-1} (m(X) - x_{(i)}) \end{aligned}$$

errechnet, so können wir VL_X mit Hilfe der ersten Diffe-

(1) Zum Begriff des größten Elementes einer Menge bezüglich einer Ordnungsrelation R siehe etwa:

A.K.Sen, Collective Choice and Social Welfare, a.a.O., S. 10

renz DVL_X darstellen als:

$$VL_X(p_i) = \sum_{j=1}^i DVL_X(p_j)$$

Wir erhalten also VL_X als eine Summe von monoton fallenden Summanden. Für p_n folgt:

$$VL_X(p_n) = \sum_{j=1}^n DVL_X(p_j) = 0$$

Das Resultat $VL_X(p_n) = 0$ impliziert aber unmittelbar $DVL_X(p_1) > 0$. Da DVL_X monoton fallend ist, wären andernfalls alle weiteren Summanden $DVL_X(p_i)$ negativ, woraus $VL_X(p_n) < 0$ folgen würde. Somit muß $DVL_X(p_1) > 0$ gelten, was zu $VL_X(p_1) > 0$ führt.

Eine analoge Überlegung zeigt, daß vor $VL_X(p_n)$ die Funktion VL_X nicht den Wert Null annehmen kann: Nehmen wir das Gegenteil an und setzen für $p_1^+ < p_n$: $VL_X(p_1^+) = 0$, woraus $DVL_X(p_1^+) < 0$ folgt. Da DVL_X monoton fallend ist, wären somit auch alle weiteren Werte von DVL_X negativ, was wiederum $VL_X(p_n) < 0$ zum Resultat hätte.

Fassen wir unsere Überlegungen zusammen, so folgt damit:

$$\begin{aligned} \forall p_i: \quad VL_X(p_i) &> 0 \\ i &\neq n \\ \text{und: } VL_X(p_n) &= 0 \end{aligned}$$

woraus unmittelbar $R_L(X_g, X)$ folgt, was zu beweisen war.

Verteilungsmaßstäbe mit dieser Eigenschaft wollen wir besonders kennzeichnen:

Def.: Ein Verteilungsmaßstab R heißt Paritätsmaßstab, wenn die extreme Gleichverteilung größtes Element bezüglich R ist, d.h.:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \implies R(X_g, X)$$

Wir setzen also Disparität oder Ungleichheit mit einer Abweichung von der extremen Gleichverteilung gleich (1). Dabei sprechen wir von einem Paritätsmaßstab, wenn die Verteilung X_g zu allen anderen Verteilungen X in der Relation R steht, andernfalls von einem Disparitätsmaßstab:

Def.: Ein Verteilungsmaßstab R heißt Disparitätsmaßstab, wenn die extreme Gleichverteilung kleinstes Element bezüglich R ist, d.h.:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \implies R(X, X_g)$$

Aus jedem Paritätsmaßstab R läßt sich mühelos ein Disparitätsmaßstab R^{-1} gewinnen, indem man die zu R entgegengesetzte inverse Ordnungsrelation R^{-1} (2) bildet:

Lemma: Für einen gegebenen Paritätsmaßstab R ist R^{-1} mit:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: R^{-1}(X, Y) \iff R(Y, X)$$

ein Disparitätsmaßstab.

Der Beweis ist evident.

-
- (1) Wir schließen uns damit der Auffassung von Fiesch an. Vgl. M. Fiesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 8
- (2) Zum Begriff einer inversen Ordnungsrelation siehe etwa: Das Fischer Lexikon, Mathematik 1, Fischer Taschenbuch-Verlag, Frankfurt, 1964, S. 259

Nach unserer Definition sollen wir den Lorenz-Maßstab also als einen Disparitätsmaßstab auf. Der zu R_L inverse Disparitätsmaßstab R_L^{-1} lautet dann gemäß der angegebenen Bildungsvorschrift:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : R_L^{-1}(X, Y) \iff \forall p_i : L_X(p_i) - L_Y(p_i) \leq 0$$

Als nächstes untersuchen wir, welchen Einfluß der Übergang von X auf die permutierte Verteilung XII auf einen Verteilungsmaßstab hat:

Def.: Ein Verteilungsmaßstab R ist symmetrisch, wenn für alle beliebigen permutationsmatrizen Π die Verteilung X zur Verteilung XII in der aus R abgeleiteten Äquivalenzrelation I steht, d.h.:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \forall \Pi \implies I(X, XII)$$

Auf einen symmetrischen Verteilungsmaßstab hat der Übergang von X auf XII keinen Einfluß. Relevant sind also nur die Einkommen selbst, nicht jedoch die Information darüber, wo dieses Einkommen jeweils bezieht. Kolm schreibt dazu (1):

"This property is unavoidable as long as income distributions are not distinguished by anything other than their amount. It is akin to the old 'equal treatment of equals' and 'horizontal equity' principles of public finance."

Für den Lorenz-Maßstab selbst dürfen wir nun folgern:

Satz: Der Lorenz-Maßstab R_L ist symmetrisch, d.h.:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \forall \Pi \implies I(X, XII)$$

(1) S.-C. Kolm, Unequal Inequalities I, Journal of Economic Theory, Vol. 12, 1976, S. 426

Beweis: Für alle Permutationsmatrizen Π und alle beliebigen Verteilungen $X \in \mathbb{R}_n^+$ gilt:

$$X\Pi\Pi(X\Pi) = (X\Pi)^0 = X^0$$

Wenden wir also auf $X\Pi$ die Permutationsmatrix $\Pi(X\Pi)$ an, so erhalten wir die geordnete Verteilung $(X\Pi)^0$, die freilich gleich der geordneten Verteilung X^0 sein muß. Damit ist die Lorenz-Kurve $L_{X\Pi}$ mit der Lorenz-Kurve L_X identisch, woraus $I_L(X, X\Pi)$ folgt, was zu beweisen war.

Für die nächste Eigenschaft benötigen wir den Begriff einer bistochastischen Matrix:

Def.: Eine Matrix Q ist bistochastisch, wenn sie quadratisch ist, ausschließlich nichtnegative Elemente besitzt und sämtliche Zeilen- und Spaltensummen gleich Eins sind (1):

$$Q = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{und } \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \text{ für alle } i, j = 1, \dots, n$$

Die schon in Abschnitt 2.1. eingeführte Permutationsmatrix Π ist offensichtlich ein Spezialfall einer bistochastischen Matrix.

(1) um Begriff einer bistochastischen Matrix siehe etwa:

A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 55 f.

S.-C.Nolm, Unequal Inequalities II, Journal of Economic Theory, Vol. 13, 1976, S. 104

C.Berge, Espaces Topologiques. Fonctions multivoques, Dunod, Paris, 1959, S. 187

Wendet man eine so definierte bistochastische Matrix Q auf einen beliebigen Verteilungsvektor X an, so erhält man eine neue Verteilung XQ , wobei jedes Einkommen der Verteilung XQ aus einer linearen konvexen Kombination aller Einkommen der Verteilung X hervorgeht: Setzen wir $Y = XQ$ und schreiben y_j für die Komponenten von Y , so folgt:

$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n$$

Ferner bleibt bei einer derartigen "konvexen Verschmelzung" die Merkmalssumme $M(X)$ der Ausgangsverteilung erhalten (1):

$$\begin{aligned} M(XQ) &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i = M(X) \end{aligned}$$

Nach diesen Vorarbeiten definieren wir:

Def.: Ein Verteilungsmaßstab R ist S -konkav (2), wenn für alle beliebigen bistochastischen Matrizen Q die aus einer konvexen Verschmelzung hervorgegangene Verteilung XQ zur Ausgangsverteilung X in der Relation R steht, d.h.:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \forall Q \implies R(XQ, X)$$

Satz: Der Lorenz-Maßstab R_L ist S -konkav, d.h.:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \forall Q \implies R_L(XQ, X)$$

(1) Vgl. A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 56

S.-C.Kolm, The Optimal Production of Social Justice, in: Public Economics, Hrsg.: J.Margolis und H.Guitton, Macmillan, London usw., 1969, S. 189

(2) Diese Definition ist analog zur Definition einer S -konkaven Funktion gehalten: Eine Funktion f ist S -konkav, wenn $f(XQ) \geq f(X)$ für alle bistochastischen Matrizen Q gilt. Zur Definition S -konkaver Funktionen siehe etwa: C.Berge, Espaces Topologiques. Fonctions multivoques, a.a.O., S. 228

Beweis: Ist XQ eine Permutation von X , so folgt unmittelbar aus der Symmetrie des Lorenz-Maßstabes die Richtigkeit von $R_L(XQ, X)$.

Ist XQ keine Permutation von X , so ziehen wir ein Theorem von Hardy, Littlewood und Polya heran. Danach sind für zwei geordnete Verteilungen X^0 und Y^0 folgende Aussagen äquivalent (1):

a) Es existiert eine bistochastische Matrix Q , so daß $Y^0 = X^0 Q$ gilt.

b) $\forall i: \sum_{j=1}^i y(j) \geq \sum_{j=1}^i x(j); \sum_{j=1}^n y(j) = \sum_{j=1}^n x(j)$

Nun ist Aussage b) äquivalent mit $R_L(Y^0, X^0)$, da wir unter Berücksichtigung der Definition der absoluten Meßmalssumme für b) auch schreiben können:

$$\forall i: M(Y^0) \sum_{j=1}^i y(j) - M(X^0) \sum_{j=1}^i x(j) \geq 0$$

was gleichbedeutend mit $R_L(Y^0, X^0)$ ist. Sind also im speziellen X und XQ geordnet, d.h. gilt $X = X^0$ und $XQ = (XQ)^0$, so ist gemäß Aussage b) unsere Behauptung $R_L(XQ, X)$ richtig (2).

Im allgemeinen jedoch sind X wie auch XQ ungeordnet (3).

In diesem Fall ordnen wir zunächst X durch $\Pi(X)$:

$$X^0 = X\Pi(X)$$

Die Verteilung XQ wird durch die Matrix $\Pi(XQ)$ gleichfalls geordnet:

$$(XQ)^0 = XQ\Pi(XQ)$$

-
- (1) Zum Theorem von Hardy, Littlewood und Polya und seinem Beweis siehe:
C. Berge, *Espaces Topologiques. Fonctions multivoques*, a.a.O., S. 191 ff.
- (2) Dieses Ergebnis findet sich auch in:
P. Dasgupta, A.K. Sen, D. Starrett, *Notes on the Measurement of Inequality*, *Journal of Economic Theory*, Vol. 6, 1973, S. 182 f.
- (3) Zu diesem Beweisschritt siehe auch Berge's "Bemerkung" in: *Espaces Topologiques. Fonctions multivoques*, a.a.O., S. 196

Diesen Ausdruck können wir nun mit $\Pi(X)\Pi(X)^{-1}$ erweitern, wobei $\Pi(X)^{-1}$ die Inverse von $\Pi(X)$ und ebenfalls eine Permutationsmatrix ist (1):

$$(XQ)^0 = X\Pi(X)\Pi(X)^{-1}Q\Pi(XQ)$$

Definieren wir nun eine neue bistochastische Matrix Q^+ mit (2):

$$Q^+ = \Pi(X)^{-1}Q\Pi(XQ)$$

so läßt sich mit ihrer Hilfe die geordnete Verteilung $(XQ)^0$ darstellen als:

$$(\lambda_n)^0 = X\Pi(X)Q^+ \quad \text{oder}$$

$$(XQ)^0 = X^0Q^+$$

Wir erhalten die geordnete Verteilung $(XQ)^0$ damit als Produkt aus der geordneten Verteilung X^0 und der bistochastischen Matrix Q^+ . In diesem Fall dürfen wir aber gemäß Aussage b)

$$R_L((XQ)^0, X^0)$$

folgern. Die Symmetrie des Lorenz-Maßstabes impliziert dann:

$$R_L(XQ, (XQ)^0) \text{ und } R_L(X^0, X)$$

woraus wir unter Benützung der Transitivität von R_L die Aussage $R_L(XQ, X)$ erhalten, was zu beweisen war.

-
- (1) Die Inverse $\Pi(X)^{-1}$ einer Permutationsmatrix $\Pi(X)$ ist stets gleich der transponierten Permutationsmatrix $\Pi(X)'$, da die Produkte $\Pi(X)\Pi(X)'$ und $\Pi(X)'\Pi(X)$ der Einheitsmatrix I entsprechen.
 - (2) Die Multiplikation einer bistochastischen Matrix mit einer Permutationsmatrix von links bewirkt eine Permutation der Zeilen, eine Multiplikation von rechts eine Permutation der Spalten der bistochastischen Matrix. Durch diese Operationen gehen die Eigenschaften einer bistochastischen Matrix nicht verloren.

Durch Rückgriff auf diesen Beweis lassen sich auch die beiden folgenden Eigenschaften des Lorenz-Maßstabs zeigen.

Def.: Ein Verteilungsmaßstab R ist quasikonkav bezüglich aller Verteilungen mit der gleichen Merkmalssumme, wenn:

$$\forall X, Y \in R_n^+ \text{ mit } M(X) = M(Y) \text{ und } \forall B \in [0, 1]:$$

$$R(Y, X) \implies R(BY + (1-B)X, X)$$

Unter der Voraussetzung $R(Y, X)$ steht also der gewogene Durchschnitt $BY + (1-B)X$ der beiden Verteilungen ebenfalls zur Verteilung X in der Relation R .

Satz: Der Lorenz-Maßstab R_L ist quasikonkav bezüglich aller Verteilungen mit der gleichen Merkmalssumme,

d.h.: $\forall X, Y \in R_n^+ \text{ mit } M(X) = M(Y) \text{ und } \forall B \in [0, 1]:$

$$R_L(Y, X) \implies R_L(BY + (1-B)X, X)$$

Beweis: wir geben uns zwei beliebige ungeordnete Verteilungen X und Y vor, für die die absoluten Merkmalssummen übereinstimmen und weiterhin $R_L(Y, X)$ gilt, und weisen zunächst die Existenz einer bistochastischen Matrix $\tilde{Q}$ nach, mit deren Hilfe die Verteilung Y als konvexe Verschmelzung der Verteilung X dargestellt werden kann:

$$\text{Aus } M(X) = M(Y) \text{ und } R_L(Y, X) \text{ folgt: } \sum_{j=1}^i y(j) \geq \sum_{j=1}^i x(j)$$

was nach vorstehendem Beweis die Existenz einer bistochastischen Matrix $\tilde{Q}$ impliziert mit der Eigenschaft:

$$Y^0 = X^0 \tilde{Q}$$

d.h. die geordnete Verteilung Y^0 geht durch $\tilde{Q}$ als konvexe

Verschmelzung der geordneten Verteilung X^0 hervor. Unter Benützung der Permutationsmatrizen $\Pi(Y)$ und $\Pi(X)$ dürfen wir auch schreiben:

$$Y\Pi(Y) = X\Pi(X)\tilde{Q}$$

Multiplizieren wir mit der Inversen $\Pi(Y)^{-1}$ von rechts durch, so folgt:

$$Y = X\Pi(X)\tilde{Q}\Pi(Y)^{-1}$$

Definieren wir nun $\Pi(X)\tilde{Q}\Pi(Y)^{-1}$ als neue bistochastische Matrix Q , so erhalten wir wie verlangt:

$$Y = XQ$$

Unter Benützung von Q können wir nun den gewogenen Durchschnitt $BY+(1-B)X$ der beiden Verteilungen darstellen mit:

$$BY+(1-B)X = X(BQ+(1-B)I)$$

Der gewogene Durchschnitt von Q und der Einheitsmatrix I ist selbst eine Matrix, die wir mit Q_B bezeichnen wollen:

$$Q_B = \begin{bmatrix} (1-B)+Ba_{11} & Ba_{12} & \dots & Ba_{1n} \\ Ba_{21} & (1-B)+Ba_{22} & \dots & Ba_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ba_{n1} & Ba_{n2} & \dots & (1-B)+Ba_{nn} \end{bmatrix} = BQ+(1-B)I$$

Die Zeilen- und Spaltensummen der neuen Matrix Q_B errechnen sich mit:

$$(1-B) + B \sum_{i=1}^n a_{ij} = (1-B) + B \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

Ferner sind alle Elemente von Q_B stets nichtnegativ.

Wir können daher für alle β aus dem Intervall $[0,1]$ die Matrix Q_β als bistochastische Matrix auffassen, durch die der gewogene Durchschnitt $\beta Y + (1-\beta)X$ als konvexe Verschmelzung der Verteilung X dargestellt werden kann:

$$\beta Y + (1-\beta)X = XQ_\beta$$

Die S -Konkavität des Lorenz-Maßstabs impliziert dann:

$$R_L(\beta Y + (1-\beta)X, X)$$

was zu beweisen war.

Def.: Ein Verteilungsmaßstab R ist lokal gleichheitspräferierend (1), wenn:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \forall \beta \in [0,1] \implies R(\beta X' + (1-\beta)X, X)$$

wobei für die Komponenten x'_i der Verteilung X' gilt:

$$x'_i = x_i \text{ für } i = k, l; \quad x'_k = x'_l = \frac{x_k + x_l}{2}$$

Ist R lokal gleichheitspräferierend, so steht der gewogene Durchschnitt $\beta X' + (1-\beta)X$ zur Verteilung X in der Relation R , wobei sich X' von X dadurch unterscheidet, daß die Einkommen der Bezieher k und l auf beide gleich verteilt werden.

Satz: Der Lorenz-Maßstab R_L ist lokal gleichheitspräferierend, d.h.:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \forall \beta \in [0,1] \implies R_L(\beta X' + (1-\beta)X, X)$$

wobei für die Komponenten x'_i der Verteilung X' gilt:

$$x'_i = x_i \text{ für } i = k, l; \quad x'_k = x'_l = \frac{x_k + x_l}{2}$$

(*) Wir haben damit das erstmalig von Rothschild und Stiglitz eingeführte Konzept lokal gleichheitspräferierenden Funktionen auf Ordnungsrelationen übertragen: Vgl. M. Rothschild und J. E. Stiglitz, Some Further Results on the Measurement of Inequality, Journal of Economic Theory, Vol. 6, 1973, S. 194 f.

Beweis: Im Hinblick auf die β -Konkavität des Lorenz-Maßstabes genügt es zu zeigen, daß sich für alle β aus dem Intervall $[0,1]$ der gewogene Durchschnitt $\beta X' + (1-\beta)X$ als Produkt aus X und einer bistochastischen Matrix darstellen läßt.

Wir betrachten dazu die Matrix $\hat{Q}_\beta$ mit:

$$\hat{Q}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & a_{kl} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{lk} & 0 & \dots & a_{ll} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zur Bestimmung der vier Koeffizienten a_{kk}, a_{lk}, a_{kl} und a_{ll} überlegen wir, daß aus:

$$\beta X' + (1-\beta)X = X \hat{Q}_\beta$$

die beiden Bestimmungsgleichungen:

$$x_k a_{kk} + x_l a_{lk} = \frac{1}{2}(2x_k + \beta(x_l - x_k))$$

$$x_k a_{kl} + x_l a_{ll} = \frac{1}{2}(2x_l + \beta(x_k - x_l))$$

folgen. Die Bistochastik von $\hat{Q}_\beta$ impliziert ferner:

$$a_{kk} = a_{ll}$$

$$a_{lk} = a_{kl}$$

so daß uns insgesamt vier Gleichungen zur Verfügung stehen.

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhalten wir die Werte:

$$a_{kk} = a_{11} = \frac{2-\beta}{2}$$

$$a_{k1} = a_{1k} = \frac{\beta}{2}$$

Setzen wir die so gefundenen vier Koeffizienten in die Matrix $\hat{Q}_\beta$ ein, so ist $\hat{Q}_\beta$ für alle β aus dem Intervall $[0,1]$ offensichtlich bistochastisch. Wenden wir ferner $\hat{Q}_\beta$ auf die ungeordnete Verteilung X an, so resultiert:

$$\beta X' + (1-\beta)X = X\hat{Q}_\beta$$

wie wir behauptet hatten. Aus der S -Konkavität des Lorenz-Maßstabs R_L folgt damit:

$$R_L(\beta X' + (1-\beta)X, X)$$

was zu beweisen war.

Abschließend wollen wir den Begriff eines global gleichheitspräferierenden Maßstabs (1) einführen:

Def.: Ein Verteilungsmaßstab R ist global gleichheitspräferierend, wenn:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \forall \beta \in [0,1] \longrightarrow R(\beta X_g + (1-\beta)X, X)$$

Ist R global gleichheitspräferierend, so steht bei Gleichverteilung der Merkmalssumme einer Verteilung X der gewogene Durchschnitt $\beta X_g + (1-\beta)X$ zur Verteilung X in der Relation R .

(1) Auch dieses ursprünglich für Funktionen eingeführte Konzept geht auf Rothschild und Stiglitz zurück: Vgl. M. Rothschild und J.E. Stiglitz, Some Further Results on the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 196

Satz: Der Lorenz-Maßstab R_L ist global gleichheitspräferierend, d.h.:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \forall \beta \in [0,1] \implies R_L(\beta X_g + (1-\beta)X, X)$$

Beweis: Zunächst gilt für die der Merkmalsgröße nach geordnete Verteilung $(\beta X_g + (1-\beta)X)^0$:

$$(\beta X_g + (1-\beta)X)^0 = \beta X_g^0 + (1-\beta)X^0$$

Damit folgt als Lorenz-Kurve für $\beta X_g + (1-\beta)X$:

$$L_{\beta X_g + (1-\beta)X}(p_i) = M(X)^{-1} \sum_{j=1}^i (\beta m(X) + (1-\beta)x_{(j)})$$

Subtrahieren wir davon die Lorenz-Kurve der Verteilung X , so erhalten wir:

$$L_{\beta X_g + (1-\beta)X}(p_i) - L_X(p_i) = \beta M(X)^{-1} \sum_{j=1}^i (m(X) - x_{(j)})$$

oder: $L_{\beta X_g + (1-\beta)X}(p_i) - L_X(p_i) = \beta VL_X(p_i)$

Da die Gleichverteilung X_g größtes Element des Lorenz-Maßstabes R_L ist (1), folgt:

$$\forall p_i: VL_X(p_i) \geq 0$$

und da β aus dem Intervall $[0,1]$ niemals negativ ist:

$$\forall p_i: L_{\beta X_g + (1-\beta)X}(p_i) - L_X(p_i) = \beta VL_X(p_i) \geq 0$$

was unmittelbar:

$$R_L(\beta X_g + (1-\beta)X, X)$$

impliziert und zu beweisen war.

(1) Siehe dazu den entsprechenden Beweis in diesem Abschnitt.

3.3. Lorenz-Maßstab und transformierte Verteilungen

Die im vorangehenden Abschnitt analysierten Ordnungseigenschaften des Lorenz-Maßstabes bezogen sich stets auf geordnete Verteilungspaare mit der gleichen absoluten Merkmalssumme. Diese Restriktion wollen wir im folgenden aufheben.

Wir gehen dazu von einer beliebigen ungeordneten Verteilung X in Einzelwerten aus:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Führen wir die strikt monoton wachsende Transformation $h(x_i) = y_i$ ein mit:

$$h(x_i) - h(x_j) > 0 \text{ falls } x_i - x_j > 0$$

so verstehen wir unter der Verteilung Y mit:

$$\begin{aligned} Y &= (h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_n)) \\ &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

die ungeordnete Transformation der Verteilung X unter Anwendung der strikt monoton wachsenden Transformation $h(x_i)$.

Wenden wir auf die ungeordnete Transformation Y die Permutationsmatrix $\Pi(Y)$ an, so ergibt sich die geordnete Transformation Y^0 mit:

$$\begin{aligned} Y^0 &= (h(x_{(1)}), h(x_{(2)}), \dots, h(x_{(n)})) \\ &= (y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n)}) \end{aligned}$$

Entsprechend erhalten wir unter Benützung der strikt monoton wachsenden Transformation $h^+(x_i) = z_i$ die ungeordnete transformierte Verteilung Z bzw. unter Anwendung der Permutationsmatrix $\Pi(Z)$ die geordnete Transformation Z^0 .

Für die Lorenz-kurven der beiden transformierten Verteilungen ermittelt man:

$$L_Y(p_i) = M(Y)^{-1} \sum_{j=1}^i y(j)$$

$$L_Z(p_i) = M(Z)^{-1} \sum_{j=1}^i z(j)$$

wobei wir die absoluten Merkmalsbeträge der beiden transformierten Verteilungen mit $M(Y) = \sum_{i=1}^n y_i$ bzw. $M(Z) = \sum_{i=1}^n z_i$ errechnen.

Um einen direkten Vergleich der Verteilungen Y und Z auf der Basis des Lorenz-Verteilungsmaßstabes vornehmen zu können, müssen zusätzlich die verwendeten Transformationen $h(x_i)$ und $h^+(x_i)$ gewissen Regularitätsanforderungen genügen. Dazu der folgende Satz:

Satz: Gegeben sei eine beliebige Verteilung X und zwei strikt monoton wachsende Transformationen $h(x_i)$ und $h^+(x_i)$. Weiterhin existiere für alle x_i die Quotientenfunktion $h(x_i)/h^+(x_i)$. Dann gilt:

- a) Die Verteilung Y steht zur Verteilung Z in der strikten Lorenz-Relation P_L , d.h. $P_L(Y, Z)$ ist richtig, wenn die Funktion $h(x_i)/h^+(x_i)$ strikt monoton fallend ist.
- b) Die Verteilung Z steht zur Verteilung Y in der strikten Lorenz-Relation P_L , d.h. $P_L(Z, Y)$ ist richtig, wenn die Funktion $h(x_i)/h^+(x_i)$ strikt monoton wachsend ist.

- c) Die Verteilung Y steht zur Verteilung Z in der Lorenz-Äquivalenzrelation I_L , d.h. $I_L(Y, Z)$ ist richtig, wenn die Funktion $h(x_i)/h^+(x_i)$ konstant ist.

Beweis: Wir bilden zunächst die Differenzen der beiden Lorenz-Kurven:

$$L_Y(p_i) - L_Z(p_i) = \sum_{j=1}^i (M(Y)^{-1}y_{(j)} - M(Z)^{-1}z_{(j)})$$

Für p_n folgt:

$$L_Y(p_n) - L_Z(p_n) = M(Y)^{-1}M(Y) - M(Z)^{-1}M(Z) = 0$$

Für alle anderen p_i erhalten wir nach algebraischer Umformung (1):

$$L_Y(p_i) - L_Z(p_i) = \sum_{j=1}^i \frac{z_{(j)}}{M(Z)} \left(\frac{y_{(j)}}{z_{(j)}} - \frac{M(Y)}{M(Z)} \right)$$

Nach diesen Vorarbeiten beweisen wir zunächst die Aussage c):

Nach Voraussetzung ist $\frac{h(x_i)}{h^+(x_i)} = \frac{y_{(i)}}{z_{(i)}}$ konstant.

Setzen wir: $\frac{y_{(i)}}{z_{(i)}} = c$, so können wir für die Differenz der Lorenz-kurven schreiben:

$$L_Y(p_i) - L_Z(p_i) = \left(c - \frac{M(Y)}{M(Z)} \right) \sum_{j=1}^i \frac{z_{(j)}}{M(Z)}$$

(1) Diese Beweisidee geht auf Fellman zurück.

Vgl. J. Fellman, The Effect of Transformations on Lorenz Curves, Econometrica, Vol. 44, 1976, S. 824

Für p_n erhalten wir unter Benützung des obigen Ergebnisses:

$$L_Y(p_n) - L_Z(p_n) = (c - \frac{M(Y)}{M(Z)}) \frac{M(Z)}{M(Y)} = 0$$

Diese Gleichung kann offensichtlich nur für:

$$c = \frac{M(Y)}{M(Z)}$$

erfüllt sein. Damit sind aber auch alle anderen Lorenz-Kurven-Differenzen gleich Null, was $L_L(Y, Z)$ impliziert und zu beweisen war.

Wenden wir uns nun der Aussage a) zu:

Nach Voraussetzung ist dann die Funktion $h(x_i)/h^+(x_i)$ strikt monoton fallend. Diese Eigenschaft impliziert für p_1 unmittelbar $y_{(1)}/z_{(1)} > M(Y)/M(Z)$, da andernfalls die Gesamtheit aller Terme $(y_{(i)}/z_{(i)} - M(Y)/M(Z))$ Null bzw. negativ wären mit zumindest einem strikt negativen Term (1), woraus $L_Y(p_n) - L_Z(p_n) < 0$ folgen würde. Dies steht aber im Widerspruch zu $L_Y(p_n) - L_Z(p_n) = 0$. Somit muß also $y_{(1)}/z_{(1)} > M(Y)/M(Z)$ und damit $L_Y(p_1) - L_Z(p_1) > 0$ gelten.

Eine ähnliche Überlegung zeigt, daß sich die beiden Lorenz-Kurven im gesamten Definitionsbereich nicht schneiden können. Läge andernfalls für irgendein beliebiges $p_i^+ < p_n$ ein Schnittpunkt vor, so wären für alle $i \geq i^+$ die Differenzen $(y_{(i)}/z_{(i)} - M(Y)/M(Z))$ strikt negativ, woraus wiederum

(1) Würden alle Terme den Wert Null annehmen, so wäre die Funktion $h(x_i)/h^+(x_i)$ konstant und nicht monoton fallend.

$L_Y(p_n) - L_Z(p_n) < 0$ und damit ein Widerspruch folgen würde.

Zusammenfassend erhalten wir also aus unseren Überlegungen:

$$\forall_{p_i: \substack{L_Y(p_i) - L_Z(p_i) > 0 \\ i \neq n}}$$

oder aber $F_L(Y, Z)$, was zu beweisen war.

Es bleibt noch Aussage c) zu zeigen. Nun ist $n(x_i)/n^+(x_i)$ genau dann strikt monoton wachsend, wenn $n^+(x_i)/h(x_i)$ strikt monoton fallend ist. Nach vorstehendem Beweis folgt aber aus letzterem $F_L(Z, Y)$.

Der von uns angegebene Satz ist eine Verallgemeinerung des von Fellman angegebenen Theorems (1). Wir erhalten es unmittelbar als Korollar:

Korollar: Gegeben sei eine beliebige Verteilung X und eine strikt monoton wachsende Transformation $h(x_i)$. Weiterhin existiere für alle x_i die Quotientenfunktion $h(x_i)/x_i$. Dann gilt:

- a) Die Verteilung Y steht zur Verteilung X in der strikten Lorenz-Relation P_L , d.h. $P_L(Y, X)$ ist richtig, wenn die Funktion $h(x_i)/x_i$ strikt monoton fallend ist.
- b) Die Verteilung X steht zur Verteilung Y in der strikten Lorenz-Relation P_L , d.h. $P_L(X, Y)$ ist richtig, wenn die Funktion $h(x_i)/x_i$ strikt monoton wachsend ist.
- c) Die Verteilung Y steht zur Verteilung X in der Lorenz-Äquivalenzrelation I_L , d.h. $I_L(Y, X)$ ist richtig, wenn die Funktion $h(x_i)/x_i$ konstant ist.

(1) Fellman setzt allerdings stetige Transformationen sowie zweimal differenzierbare Lorenz-Kurven voraus. Vgl. J. Fellman, The Effect of Transformations on Lorenz Curves, a.a.O., S. 823

Der Beweis des Korollars folgt unmittelbar aus dem vorstehenden Satz, wenn man für h^+ gerade die identische Abbildung wählt.

Unsere Ergebnisse können wir auch mit Hilfe der Elastizität $E_{Y,Z}$ darstellen, wobei $E_{Y,Z}$ mit:

$$E_{Y,Z} = \frac{h(x_{(i+1)}) - h(x_{(i)})}{h^+(x_{(i+1)}) - h^+(x_{(i)})} \frac{h^+(x_{(i)})}{h(x_{(i)})}$$

definiert ist (1).

Korollar: Gegeben seien eine beliebige Verteilung X und zwei strikt monoton wachsende Transformationen $h(x_i)$ und $h^+(x_i)$. Weiterhin existiere für alle $x_{(i)}$ die Elastizität $E_{Y,Z}$. Dann gilt:

- a) $P_L(Y,Z)$, wenn $E_{Y,Z} < 1$ für alle $x_{(i)}$.
- b) $P_L(Z,Y)$, wenn $E_{Y,Z} > 1$ für alle $x_{(i)}$.
- c) $I_L(Y,Z)$, wenn $E_{Y,Z} = 1$ für alle $x_{(i)}$.

Beweis: Aus der Definition der Elastizität $E_{Y,Z}$ folgt unter der Voraussetzung $E_{Y,Z} < 1$ die Ungleichung:

$$h(x_{(i+1)}) - h(x_{(i)}) \cdot h^+(x_{(i)}) < h^+(x_{(i+1)}) - h^+(x_{(i)}) \cdot h(x_{(i)})$$

Nach algebraischer Umformung erhalten wir daraus:

$$h(x_{(i+1)})/h^+(x_{(i+1)}) < h(x_{(i)})/h^+(x_{(i)})$$

d.h. die Funktion $h(x_i)/h^+(x_i)$ ist für alle x_i strikt monoton fallend. Dies impliziert aber nach vorstehendem Satz unmittelbar $P_L(Y,Z)$, womit Aussage a) bewiesen wäre. Die Aussagen b) und c) lassen sich analog beweisen, indem man ">" bzw. "=" an Stelle von "<" setzt.

(1) Offensichtlich existiert $E_{Y,Z}$ nur dann, wenn für die geordneten Komponenten der Verteilung X die Bedingung: $0 < x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(n)}$ erfüllt ist.

Aus der Überlegung, daß $\varepsilon_{Y,Z} = \frac{E_{Y,X}}{E_{Z,X}}$ gelten muß, erhalten wir Kakwani's Theorem 1 als weiteres Korollar (1):

Korollar: Gegeben seien eine beliebige Verteilung X und zwei strikt monoton wachsende Transformationen $h(x_i)$ und $h^+(x_i)$. weiterhin sollen für alle $x_{(i)}$ die Elastizitäten $E_{Y,X}$ und $E_{Z,X}$ existieren. Dann gilt:

- a) $P_L(Y,Z)$, wenn $E_{Y,X} < E_{Z,X}$ für alle $x_{(i)}$.
- b) $P_L(Z,Y)$, wenn $E_{Y,X} > E_{Z,X}$ für alle $x_{(i)}$.
- c) $I_L(Y,Z)$, wenn $E_{Y,X} = E_{Z,X}$ für alle $x_{(i)}$.

Beweis: Aus der Voraussetzung $E_{Y,X} < E_{Z,X}$ folgt sofort $\frac{E_{Y,X}}{E_{Z,X}} < 1$ oder aber $E_{Y,Z} < 1$, was nach vorstehendem Korollar $P_L(Y,Z)$ impliziert, so daß Aussage a) bewiesen wäre. Analog lassen sich auch b) und c) zeigen.

Schließlich können wir auch Fellman's Theorem für Elastizitäten umformulieren (2):

Korollar: Gegeben seien eine beliebige Verteilung X und eine strikt monoton wachsende Transformation $h(x_i)$. weiterhin existiere für alle $x_{(i)}$ die Elastizität $E_{Y,X}$. Dann gilt:

- a) $P_L(Y,X)$, wenn $E_{Y,X} < 1$ für alle $x_{(i)}$.
- b) $P_L(X,Y)$, wenn $E_{Y,X} > 1$ für alle $x_{(i)}$.
- c) $I_L(Y,X)$, wenn $E_{Y,X} = 1$ für alle $x_{(i)}$.

(1) Vgl. N.C.Kakwani, Applications of Lorenz Curves in Economic Analysis, Econometrica, Vol. 45, 1977, S. 720

(2) Diesem Ergebnis entspricht Kakwani's Korollar 2. Wie Fellman setzt allerdings auch Kakwani stetige Transformationen und differenzierbare Lorenz-Kurven voraus. Vgl. ebd. S. 721

3.4. Ökonomische Anwendungen

Für die in Abschnitt 3.3. hergeleiteten Zusammenhänge lassen sich vielfältige Anwendungsmöglichkeiten aus dem Bereich der Finanzwissenschaft finden. Insbesondere können wir damit die Auswirkungen unterschiedlicher Steuertarife auf die Disparität untersuchen.

Wir gehen dazu von einer beliebigen Verteilung der Bruttoeinkommen aus, die durch den Verteilungsvektor:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

repräsentiert werde. Definieren wir mit $h(x_i) \leq x_i$ eine strikt monoton wachsende Steueraufkommensfunktion (1), deren marginale Steuerquote stets kleiner als Eins sei, so können wir die Verteilung des Steueraufkommens durch:

$$Y = (h(x_1), h(x_2), \dots, h(x_n))$$

darstellen. Da sich das Einkommen nach Steuerabzug oder auch Nettoeinkommen durch die strikt monoton wachsende Funktion $x_i - h(x_i)$ errechnet, erhalten wir durch den Verteilungsvektor:

$$Z = (x_1 - h(x_1), x_2 - h(x_2), \dots, x_n - h(x_n))$$

folglich die Verteilung des Nettoeinkommens. Gemäß unserer Definition einer transformierten Verteilung können wir somit die Verteilungen des Steueraufkommens sowie des Nettoeinkommens als Transformationen der Verteilung des Bruttoeinkommens interpretieren.

(1) Der Fall einer Kopfsteuer wird gesondert behandelt.

Die Lorenz-Kurven der drei Verteilungen X, Y und Z erhalten wir mit:

$$L_X(p_i) = M(X)^{-1} \sum_{j=1}^i x_{(j)}$$

$$L_Y(p_i) = M(Y)^{-1} \sum_{j=1}^i h(x_{(j)}) \quad \text{mit } M(Y) = \sum_{i=1}^n h(x_i)$$

$$L_Z(p_i) = M(Z)^{-1} \sum_{j=1}^i (x_{(j)} - h(x_{(j)})) \quad \text{mit } M(Z) = M(X) - M(Y)$$

Dabei können wir die absolute Merkmalssumme $M(Y)$ der Verteilung Y als gesamtes Steueraufkommen deuten.

Bilden wir nun die Differenzen der Lorenz-Kurven L_Z und L_X , so folgt:

$$L_Z(p_i) - L_X(p_i) = M(Z)^{-1} \sum_{j=1}^i (x_{(j)} - h(x_{(j)})) - M(X)^{-1} \sum_{j=1}^i x_{(j)}$$

Nach algebraischer Umformung ergibt sich daraus:

$$L_Z(p_i) - L_X(p_i) = \frac{M(X) - M(Z)}{M(Z)} \sum_{j=1}^i \frac{x_{(j)}}{M(X)} - \frac{M(Y)}{M(Z)} \sum_{j=1}^i \frac{h(x_{(j)})}{M(Y)}$$

oder aber unter Benützung der für L_X und L_Y errechneten Ausdrücke:

$$L_Z(p_i) - L_X(p_i) = \frac{M(Y)}{M(Z)} [L_X(p_i) - L_Y(p_i)]$$

Die Differenzen der Lorenz-Kurven L_Z und L_X sind also direkt proportional zu den Differenzen der Lorenz-Kurven L_X und L_Y mit dem Proportionalitätsfaktor $M(Y)/M(Z)$, der stets positiv ist (1).

(1) Zu diesem Ergebnis siehe auch: N.C.Kakwani, Applications of Lorenz Curves in Economic Analysis, a.a.O., S. 723

Nach diesen Vorarbeiten können wir nun den Satz aufstellen:

Satz: Gegeben sei eine beliebige Bruttoverteilung des Einkommens X und eine strikt monoton wachsende Steueraufkommensfunktion $h(x_i) \leq x_i$ mit einer marginalen Steuerquote von kleiner Eins. Weiterhin existiere für alle $x_{(i)}$ der Durchschnittssteuersatz $h(x_{(i)})/x_{(i)}$ und die Steueraufkommenselastizität $E_{Y,X}$. Dann gilt:

- a) $P_L(Z, X)$, wenn $E_{Y,X} > 1$ bzw. $h(x_{(i)})/x_{(i)}$ strikt monoton wachsend für alle $x_{(i)}$ ist.
- b) $P_L(X, Z)$, wenn $E_{Y,X} < 1$ bzw. $h(x_{(i)})/x_{(i)}$ strikt monoton fallend für alle $x_{(i)}$ ist.
- c) $I_L(Z, X)$, wenn $E_{Y,X} = 1$ bzw. $h(x_{(i)})/x_{(i)}$ konstant für alle $x_{(i)}$ ist.

Beweis: Ist $E_{Y,X} > 1$ bzw. $h(x_{(i)})/x_{(i)}$ strikt monoton wachsend, so folgt gemäß unseren in Abschnitt 3.3. abgeleiteten Ergebnissen $P_L(X, Y)$, was:

$$\frac{M(Y)}{M(Z)} [L_X(p_i) - L_Y(p_i)] > 0 \quad \text{für alle } p_i \quad i \neq n$$

und damit $P_L(Z, X)$ impliziert. Ist umgekehrt $E_{Y,X} < 1$ bzw. $h(x_{(i)})/x_{(i)}$ strikt monoton fallend, so folgt $P_L(Y, X)$ und damit auch:

$$\frac{M(Y)}{M(Z)} [L_X(p_i) - L_Y(p_i)] < 0 \quad \text{für alle } p_i \quad i \neq n$$

woraus wir unmittelbar $P_L(X, Z)$ erhalten.

Schließlich folgt aus $E_{Y,X} = 1$ bzw. der Konstanz von $h(x_{(i)})/x_{(i)}$ zunächst $L_L(X,Y)$, woraus sich:

$$\frac{M(Y)}{M(Z)} [L_X(p_i) - L_Y(p_i)] = 0 \quad \text{für alle } p_i$$

und damit $L_L(Z,X)$ ergibt, womit unser Satz bewiesen wäre.

Wir können also Piesch's Vermutung (1) bestätigen, daß unabhängig von der Form der Einkommensverteilung bei einem progressiven Steuertarif die Disparität eindeutig sinkt, während sie bei einem regressiven Steuertarif eindeutig zunimmt (2). Für die Lorenz-Kurven L_X , L_Y und L_Z gilt dabei im ersten Fall:

$$P_L(Z,X) \text{ und } P_L(X,Y)$$

wohingegen im Fall eines regressiven Tarifs:

$$P_L(Y,X) \text{ und } P_L(X,Z)$$

richtig ist. Für jede Einkommensverteilung liegt damit die Lorenz-Kurve der Bruttoeinkommen stets zwischen den Lorenz-Kurven der Nettoeinkommen und der Steuerbeträge (3).

Bei einem proportionalen Steuertarif schließlich bleibt die Disparität gleich mit:

$$L_L(Z,X) \text{ und } L_L(X,Y)$$

d.h. die Lorenz-Kurven der drei Verteilungen fallen stets zusammen (4).

(1) Vgl. W. Piesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 68

(2) Vgl. N.C. Kakwani, Applications of Lorenz Curves in Economic Analysis, a.a.O., S. 723

(3) Vgl. W. Piesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 67

(4) Ebd. S. 67

Wie ändert sich nun die Verteilung der Nettoeinkommen und damit die Disparität, wenn wir einen anderen Steuertarif wählen? Wir führen dazu eine zweite Steuerfunktion $\tilde{h}(x_i) \leq x_i$ ein, für die wir entsprechend eine Verteilung der Steuerbeträge $\tilde{Y}$ und eine Verteilung der Nettoeinkommen definieren. Dann erhalten wir für die Differenzen der Lorenz-Kurven der Nettoeinkommen $L_{\tilde{Z}}$ und L_Z :

$$L_{\tilde{Z}}(p_i) - L_Z(p_i) = L_{\tilde{Z}}(p_i) - L_X(p_i) - [L_Z(p_i) - L_X(p_i)]$$

woraus sich unter Benützung der vorstehenden Ergebnisse:

$$\frac{M(X) [L_X(\tilde{Y}) - L_X(Y)]}{M(\tilde{Z})M(Z)} L_X(p_i) + \frac{L_X(Y)}{M(Z)} L_Y(p_i) - \frac{M(\tilde{Y})}{M(\tilde{Z})} L_{\tilde{Y}}(p_i)$$

ergibt. Diesen Ausdruck (1) können wir durch die folgende Fallunterscheidung noch weiter vereinfachen:

- 1) Das Steueraufkommen aus beiden Steuerfunktionen sei gleich, d.h. es gelte $M(\tilde{Y}) = M(Y)$. In diesem Fall erhalten wir:

$$L_{\tilde{Z}}(p_i) - L_Z(p_i) = \frac{L_X(Y)}{M(Z)} [L_Y(p_i) - L_{\tilde{Y}}(p_i)]$$

- 2) Die Steueraufkommenselastizität beider Steuerfunktionen sei gleich, d.h. es gelte $E_{\tilde{Y},X} = E_{Y,X}$ für alle $x_{(i)}$.

Gemäß den in Abschnitt 3.3. abgeleiteten Ergebnissen folgt aus dieser Annahme zunächst $L_L(\tilde{Y}, Y)$ und damit $L_{\tilde{Y}}(p_i) = L_Y(p_i)$ für alle p_i , woraus unmittelbar:

$$L_{\tilde{Z}}(p_i) - L_Z(p_i) = \frac{L_X(X) [L_X(\tilde{Y}) - L_X(Y)]}{M(\tilde{Z})M(Z)} [L_X(p_i) - L_Y(p_i)]$$

für die Lorenz-Kurven Differenzen folgt.

(1) Vgl. dazu die bei Kakwani angegeben Formel: N.C.Kakwani, Applications of Lorenz Curves in Economic Analysis, a.a.O., S. 723

Für diese beiden Fälle können wir nun die folgenden Aussagen treffen:

Satz: Gegeben seien eine beliebige Bruttoverteilung des Einkommens X und zwei strikt monoton wachsende Steueraufkommensfunktionen $\tilde{h}(x_i) \leq x_i$ und $h(x_i) \leq x_i$, deren marginale Steuerquote jeweils kleiner als Eins sei. Weiterhin sollen für alle $x_{(i)}$ die Steueraufkommenselastizitäten $E_{\tilde{Y}, X}$ und $E_{Y, X}$ existieren. Dann gilt:

a) $P_L(\tilde{Z}, Z)$, wenn $M(\tilde{Y}) = M(Y)$ und $E_{\tilde{Y}, X} > E_{Y, X}$
 oder $M(\tilde{Y}) > M(Y)$ und $E_{\tilde{Y}, X} = E_{Y, X} > 1$
 oder $M(\tilde{Y}) < M(Y)$ und $E_{\tilde{Y}, X} = E_{Y, X} < 1$
 für alle $x_{(i)}$ ist.

b) $P_L(Z, \tilde{Z})$, wenn $M(\tilde{Y}) = M(Y)$ und $E_{\tilde{Y}, X} < E_{Y, X}$
 oder $M(\tilde{Y}) < M(Y)$ und $E_{\tilde{Y}, X} = E_{Y, X} > 1$
 oder $M(\tilde{Y}) > M(Y)$ und $E_{\tilde{Y}, X} = E_{Y, X} < 1$
 für alle $x_{(i)}$ ist.

c) $P_L(\tilde{Z}, \tilde{Z})$, wenn $M(\tilde{Y}) = M(Y)$ und $E_{\tilde{Y}, X} = E_{Y, X}$
 oder $M(\tilde{Y}) > 0$, $M(Y) > 0$ und $E_{\tilde{Y}, X} = E_{Y, X} = 1$
 für alle $x_{(i)}$ ist.

Die Richtigkeit dieser Aussagen folgt wieder aus den Ergebnissen des Abschnittes 3.3., die man auf die beiden aus der Fallunterscheidung gewonnenen Ausdrücke anwendet und dabei analog den Überlegungen des vorangegangenen Satzes verfährt. Auf eine explizite Demonstration soll daher verzichtet werden.

Wir erhalten damit auf die eingangs gestellte Frage als Antwort (1):

Gehen wir von der Steuerfunktion $h(x_1)$ auf die Steuerfunktion $\tilde{h}(x_1)$ über, wobei das Steueraufkommen konstant bleibe, so sinkt die Disparität der Nettoverteilung Z , wenn $\tilde{h}(x_1)$ eine einheitlich größere Steueraufkommenselastizität als $h(x_1)$ aufweist, und steigt, wenn $\tilde{h}(x_1)$ eine einheitlich kleinere Aufkommenselastizität hat. Der Abbau der Disparität ist dabei umso größer, je progressiver bzw. weniger regressiv $\tilde{h}(x_1)$ im Vergleich zu $h(x_1)$ ist. Entsprechend verstärkt sich die Disparität, je regressiver bzw. weniger progressiv der neue Tarif ist. Im Spezialfall gleicher Elastizitäten wie auch gleichen Aufkommens bleibt die Disparität freilich unverändert.

Für zwei Funktionen $h(x_1)$ und $\tilde{h}(x_1)$ mit der gleichen Aufkommenselastizität kann man für den Fall eines progressiven Tarifs der Funktion mit dem höheren Steueraufkommen die Nettoverteilung mit der geringeren Disparität zuweisen, im Falle eines regressiven Tarifs der Funktion mit dem kleineren Aufkommen. Sind beide Tarife schließlich proportional, so fallen unabhängig vom jeweiligen Steueraufkommen die Lorenz-kurven der Nettoverteilungen stets zusammen, die Disparität verringert sich also nicht.

Für Steueraufkommensfunktionen mit sowohl unterschiedlichem Aufkommen wie auch unterschiedlichen Elastizitäten lassen sich im allgemeinen keine Aussagen machen.

(1) Vgl. N.C.Kakwani, Applications of Lorenz Curves in Economic Analysis, a.a.O., S. 723

Nachzutragen bleibt der Fall der Kopfsteuer. Wir setzen als Steuerfunktion $h(x_i)=h_0$ (mit $h_0>0$ für alle x_i) und erhalten daraus die Verteilung der Nettoeinkommen mit:

$$Z = (x_1-h_0, x_2-h_0, \dots, x_n-h_0)$$

die wir als Transformation der Bruttoverteilung $X (x_1, \dots, x_n)$ unter Anwendung der Transformation x_i-h_0 auffassen. Da die Quotientenfunktion $(x_i-h_0)/x_i$ für alle x_i strikt monoton wachsend ist, so folgt damit $P_L(X, Z)$ gemäß unseren Ergebnissen in Abschnitt 3.3., d.h. eine Kopfsteuer erhöht eindeutig die Disparität (1). Aus diesem Resultat können wir aber auch schließen:

Korollar: Gleiche absolute Zuwächse wirken nivellierend, d.h. für alle $X \in \mathbb{R}_n^+$ ($X \neq X_0$) und alle $x_0 > 0$ gilt:

$$P_L((x_1+x_0, x_2+x_0, \dots, x_n+x_0), X)$$

Damit erfüllt der positive Lorenz-Verteilungsmaßstab Dalton's Prinzip absoluter Einkommenszuwächse (2):

"This may be called the principle of equal additions to incomes, and is to the effect that equal additions to all incomes diminish inequality and equal subtractions increase it."

Aus dem Ergebnis für proportionale Steuertarife folgern wir abschließend analog (3):

Korollar: Gleiche proportionale Zuwächse lassen die Disparität unverändert, d.h. für alle $X \in \mathbb{R}_n^+$ und alle $\lambda > 1$ gilt:

$$P_L((x_1+\lambda x_1, x_2+\lambda x_2, \dots, x_n+\lambda x_n), X)$$

(1) Vgl. A. Pösch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 67

Vgl. J. Fellman, The Effect of Transformations on Lorenz Curves, a.a.O., S. 824

(2) H. Dalton, The Measurement of the Inequality of Incomes, The Economic Journal, Vol. 30, 1920, S. 356

(3) Vgl. E. Schaich, Lorenzfunktion und Gini-Koeffizient in kritischer Betrachtung, a.a.O., S. 205

4. Lineare Verteilungsmaßstäbe und Verteilungsmaße

4.1. Die Konstruktion linearer Maßstäbe und Maße

So anschaulich der positive Lorenz-Verteilungsmaßstab auch ein deskriptives Bild der Ungleichheit zeichnet, es lassen sich doch zwei schwerwiegende Mängel festhalten: Zum einen ist der Lorenz-Maßstab unvollständig: Unvergleichbar im Sinne des Lorenz-Maßstabes sind alle Verteilungen, deren Lorenz-Kurven sich schneiden. Zum anderen liefert er lediglich eine Rangordnung über den Verteilungen, wir erhalten aber keine Informationen über die Intensität der Disparität. Aus der Aussage $\mu_L(X,Y)$ läßt sich nicht ersehen, um "wieviel" gleicher die Verteilung X gegenüber der Verteilung Y ist. Mit anderen Worten: Der Lorenz-Maßstab besitzt als Quasiordnung keinerlei kardinalen Informationsgehalt.

Um dem Mangel der Unvollständigkeit zu begegnen, müssen wir zumindest Ordnungen, d.h. vollständige Ordnungsrelationen heranziehen. Kardinale Informationen sind darin freilich auch noch nicht enthalten: dazu sind mindestens semi-kardinale wenn nicht kardinale Maße erforderlich.

Nun ist es im allgemeinen möglich, aus der Grundidee des Lorenz-Verteilungsmaßstabes eine Klasse von vollständigen Verteilungsmaßstäben zu konstruieren, die den Lorenz-Maßstab als Subrelation enthalten und ihn zu einer vollständigen Ordnungsrelation ergänzen. Darüber hinaus können wir eine Klasse strikt kardinaler Verteilungsmaße ableiten, die stringente Intensitätsaussagen erlauben. Zwischen diesen beiden Klassen bestehen schließlich enge Zusammenhänge.

Die Grundidee des Lorenz-Verteilungsmaßstabes bestand darin, Lorenz-Kurven-Differenzen zur Messung der Disparität heranzuziehen. Diese Überlegung liefert uns nun den Ansatz für die Konstruktion einer Klasse vollständiger Maßstäbe wie auch kardinaler Maße: Zunächst gewichten wir die Differenzen zweier Lorenz-Kurven mit den ersten Differenzen Dg einer Gewichtsfunktion $g(p_i)$, die in p_i zumindest schwach monoton wächst (1). Für zwei beliebige Verteilungen Y und X bilden wir also Ausdrücke von der Art:

$$(L_Y(p_i) - L_X(p_i))Dg(p_{i+1}) \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1$$

$$\text{mit } Dg(p_{i+1}) = g(p_{i+1}) - g(p_i) \geq 0$$

Dabei erfolgt die Benützung der Differenz $Dg(p_{i+1})$ anstelle der Differenz $Dg(p_i)$ allein aus mathematischer Zweckmäßigkeit.

In einem zweiten Schritt addieren wir nun alle gewogenen Lorenz-Kurven-Differenzen, wobei wir $L_Y(p_n) - L_X(p_n)$ unberücksichtigt lassen, da diese Differenz für alle Verteilungen stets den Wert Null annimmt (2):

$$\sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i))Dg(p_{i+1})$$

Dieser Ausdruck kann offensichtlich für beliebige Verteilungen sowohl positiv wie auch negativ sein bzw. den Wert Null annehmen. Diese Eigenschaft legt uns unmittelbar die folgende Definition einer vollständigen Ordnungsrelation nahe, die wir als linearen Verteilungsmaßstab bezeichnen wollen:

(1) Wir verwenden dabei folgende Definition: g heißt:

- schwach monoton wachsend, wenn mindestens eine Konstanzstelle existiert, d.h. $\exists k < n: Dg(p_{k+1}) = 0$
- strikt monoton wachsend, wenn keine Konstanzstelle existiert, d.h. $\forall k < n: Dg(p_{k+1}) > 0$
- zumindest schwach monoton wachsend, wenn sie entweder schwach oder aber strikt monoton wachsend ist.

(2) Vgl. dazu die Abschnitte 3.2. und 3.3.

Def.: Gegeben sei eine zumindest schwach monoton wachsende Gewichtsfunktion g . Dann verstehen wir unter einem positiven linearen Verteilungsmaßstab eine vollständige Ordnungsrelation R_g mit:

$$\forall X, Y \in R_n^+: R_g(Y, X) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \Delta g(p_{i+1}) \geq 0$$

Mit anderen Worten: Die Verteilung Y steht zur Verteilung X genau dann in der linearen Ordnung R_g , wenn die Summe der gewogenen Lorenz-Kurven-Differenzen größer oder gleich Null ist.

Da wir unter Berücksichtigung der angeführten Restriktion ansonsten in der Wahl der Gewichtsfunktion $g(p_i)$ frei sind, haben wir mit der obigen Vorschrift eine ganze Klasse von linearen Verteilungsmaßstäben definiert, die alle reflexiv, transitiv und vollständig sind:

Zunächst folgt für alle Verteilungen $X \in R_n^+$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (L_X(p_i) - L_X(p_i)) \Delta g(p_{i+1}) &= 0 \\ \Rightarrow R_g(X, X) \end{aligned}$$

womit die Reflexivität von R_g nachgewiesen wäre

Folgende Überlegung zeigt uns die Transitivität von R_g :

$$\begin{aligned} \forall X, Y, Z \in R_n^+: R_g(X, Y) \text{ und } R_g(Y, Z) \\ \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} (L_X(p_i) - L_Y(p_i)) \Delta g(p_{i+1}) \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_Z(p_i)) \Delta g(p_{i+1}) \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und damit aus der Transitivität der "größer-als-oder-gleich" Relation ($\geq$):

$$\sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \cdot g(p_{i+1}) \geq 0 \\ \implies R_G(X, Y)$$

Schließlich ist R_G vollständig, da für alle $X, Y \in R_n^+$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \cdot g(p_{i+1}) \geq 0 \text{ und/oder} \\ \sum_{i=1}^{n-1} (L_X(p_i) - L_Y(p_i)) \cdot g(p_{i+1}) \leq 0 \\ \implies R_G(Y, X) \text{ und/oder } R_G(X, Y)$$

was zu be weisen war.

Aus jedem linearen Verteilungsmaßstab läßt sich ein strikter linearer Verteilungsmaßstab P_G ableiten (1):

Def.: Gegeben sei eine zumindest monoton schwach wachsende Gewichtsfunktion g und ein linearer Verteilungsmaßstab R_G . Dann verstehen wir unter einem strikten linearen Verteilungsmaßstab eine partielle strikte Ordnung P_G mit:

$$\forall X, Y \in R_n^+: P_G(Y, X) \iff R_G(Y, X) \text{ und nicht } R_G(X, Y) \\ \iff \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \cdot g(p_{i+1}) > 0$$

Das geordnete Paar (Y, X) steht also genau dann in der partiellen strikten Ordnung P_G , wenn die Summe der gewogenen Lorenz-kurven-Differenzen größer Null ist.

(1) Vgl. dazu Abschnitt 2.2. dieser Arbeit.

Schließlich können wir die Äquivalenz-Relation eines linearen Verteilungsmaßstabes definieren:

Def.: Gegeben sei eine zumindest schwach monoton wachsende Gewichtsfunktion g und ein linearer Verteilungsmaßstab R_g . Dann bezeichnen wir als Äquivalenz-Relation eines linearen Verteilungsmaßstabes eine binäre Relation I_g mit:

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in U_n^+ : I_g(Y, X) &\iff R_g(Y, X) \text{ und } R_g(X, Y) \\ &\iff \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) g(p_{i+1}) = 0 \end{aligned}$$

Die Äquivalenz-Relation I_g enthält also alle geordneten Verteilungspaare (X, Y) , deren Summe von gewogenen Lorenz-Kurven-Abständen gerade Null beträgt.

Diese Summe können wir aber auch zur Ableitung eines kardinalen Verteilungsmaßes heranziehen. Da kardinale Maße als eine Funktion des Vektors X definiert wurden (1), darf Y folglich nicht mehr variieren. Ferner wurde als Wertebereich kardinaler Verteilungsmaße gerade der nichtnegative Bereich der reellen Zahlen vorausgesetzt. Wir müssen daher die Möglichkeit negativer Summen ausschließen, d.h. wir müssen eine Verteilung Y suchen, für die stets die Differenz der Lorenz-Kurven $L_Y(p_i) - L_X(p_i)$ nichtnegative Werte annimmt. Diese Bedingung wird aber gerade von der extremen Gleichverteilung X_g erfüllt, da X_g größtes Element der Lorenz-Relation R_L ist (2). Setzen wir also für die Verteilung Y gerade die extreme Gleichverteilung X_g , so erhalten wir ein kardinales Maß, daß wir auch als lineares Verteilungsmaß bezeichnen:

(1) Siehe dazu Abschnitt 2.2. dieser Arbeit.

(2) Siehe dazu Abschnitt 3.2. dieser Arbeit.

Def.: Gegeben sei eine zumindest schwach monoton wachsende Gewichtsfunktion g . Dann bezeichnen wir die Funktion $G_p(X)$ mit:

$$\forall X \in R_n^+: G_p(X) = \sum_{i=1}^{p-1} (L_{X_E}(p_i) - L_X(p_i)) Dg(p_{i+1})$$

als positives lineares Verteilungsmaß (1).

Da die Gewichtsfunktion g im Rahmen der angegebenen Beschränkung frei wählbar ist, haben wir mit dieser Definition wiederum eine ganze Klasse von linearen Verteilungsmaßen bestimmt. Alle Maße aus dieser Klasse besitzen die gleiche Bauart: Jedem Verteilungsvektor X wird die Summe der gewogenen Abweichungen zwischen der Lorenzkurve L_X und der aus der Gleichverteilung der Merkmalssumme $N(X)$ resultierenden Lorenzkurve L_{X_E} zugeordnet.

Der Wertebereich eines beliebigen linearen Maßes G_p liegt unter der Voraussetzung, daß $G_p(X_u)$ existiert,

$$\text{im Intervall } \left[0, \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{n} Dg(p_{i+1}) \right].$$

Für die extreme Gleichverteilung X_E :

$$G_p(X_E) = \sum_{i=1}^{p-1} (L_{X_E}(p_i) - L_{X_E}(p_i)) Dg(p_{i+1}) = 0$$

Für die extreme Ungleichverteilung X_u ergibt sich:

$$G_p(X_u) = \sum_{i=1}^{p-1} (L_{X_E}(p_i) - L_{X_u}(p_i)) Dg(p_{i+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{n} Dg(p_{i+1})$$

Zwischen diesen Extrema liegen alle anderen Maßwerte, da

- (1) Das Konzept "linearer" Verteilungsmaße geht auf Mehran zurück. Unserer diskreten Definition entspricht der mit Hilfe der inversen Verteilungsfunktion entwickelte Ausdruck (3) in:

F. Mehran, Linear Measures of Income Inequality, *Econometrica*, Vol. 44, 1976, S. 806

$$G_E(X_u) - G_E(X) = \sum_{i=1}^{n-1} L_X(p_i) Dg(p_{i+1}) \geq 0$$

$$\text{und } G_E(X) - G_E(X_E) = \sum_{i=1}^{n-1} (L_X(p_i) - L_X(p_i)) Dg(p_{i+1}) \geq 0$$

für alle beliebigen Verteilungsvektoren $X \in K_n^+$ gilt.

Verwenden wir die schon eingeführte Funktion $\nabla L_X(p_i)$, so erhalten wir eine weitere Darstellung von G_E :

$$\text{Aus } \nabla L_X(p_i) = L_X(p_i) - L_X(p_{i-1}) \text{ und } Dg(p_{i+1}) = g(p_{i+1}) - g(p_i)$$

folgt zunächst:

$$G_E(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \nabla L_X(p_i) Dg(p_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \nabla L_X(p_i) g(p_i)$$

was äquivalent mit:

$$G_E(X) = \sum_{i=1}^n \nabla L_X(p_{i-1}) g(p_i) = \sum_{i=1}^n \nabla L_X(p_i) g(p_i)$$

ist. Bilden wir nun die erste Differenz $D\nabla L_X$ mit:

$$D\nabla L_X(p_i) = \nabla L_X(p_i) - \nabla L_X(p_{i-1})$$

so erhalten wir daraus:

$$G_E(X) = - \sum_{i=1}^n D\nabla L_X(p_i) g(p_i)$$

oder aber:

$$\begin{aligned} G_E(X) &= M(X)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - m(X)) g(p_i) \\ &= m(X)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - m(X)) g(p_i) \frac{1}{n} \end{aligned}$$

womit wir ein diskretes Analogon der von Mehran gegebenen Definition 1) erhalten (1).

(1) Vgl. P. Mehran, Linear Measures of Income Inequality, a.s.o., S. 805

Abschließend wollen wir die Beziehungen zwischen den beiden Klassen linearer Maße und Maßstäbe aufzeigen. Wir bilden dazu für eine beliebige Gewichtsfunktion g das lineare Maß $G_g(X)$. Die von G_g induzierte Rangordnung über den Verteilungen wird dabei durch den Verteilungsmaßstab R_{Gg} repräsentiert, den wir mit:

$$\forall X, Y \in R_n^+: R_{Gg}(X, Y) \iff G_g(X) \geq G_g(Y)$$

ernhalten. Dann behaupten wir:

Satz: Für eine zumindest schwach monoton wachsende Gewichtsfunktion g seien das lineare Maß G_g und der lineare Maßstab R_g gegeben. Dann ist der aus G_g abgeleitete Maßstab R_{Gg} äquivalent mit der zum linearen Maßstab R_g inversen Ordnungsrelation R_g^{-1} :

$$\forall X, Y \in R_n^+: R_{Gg}(X, Y) \iff R_g^{-1}(X, Y) \iff R_g(Y, X)$$

Beweis: Zunächst ist $G_g(X) \geq G_g(Y)$ äquivalent mit:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (L_{X_g}(p_i) - L_{Y_g}(p_i) + L_{Y_g}(p_i) - L_{X_g}(p_i)) Dg(p_{i+1}) \geq 0$$

Da für alle beliebigen Verteilungen $X, Y \in R_n^+$:

$$L_{X_g}(p_i) - L_{Y_g}(p_i) = M(X)^{-1} \text{im}(X) - M(Y)^{-1} \text{im}(Y) = \frac{i}{n} - \frac{i}{n} = 0$$

gilt, reduziert sich dieser Ausdruck zu:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (L_{Y_g}(p_i) - L_{X_g}(p_i)) Dg(p_{i+1}) \geq 0$$

was aber gleichbedeutend mit $R_g(Y, X)$ oder aber $R_g^{-1}(X, Y)$ ist und zu beweisen war (1).

(1) Die zu R_g inverse Ordnungsrelation R_g^{-1} ist definiert mit: $X, Y \in R_n^+: R_g^{-1}(X, Y) \iff R_g(Y, X)$.

4.2. Eigenschaften linearer Maßstäbe und Maße

Im folgenden Abschnitt sollen einige grundlegende Charakteristika linearer Maßstäbe und Maße aufgezeigt werden. Dazu der folgende fundamentale Satz:

Satz: Der Lorenz-Maßstab R_L ist Subrelation (1) aller linearen Maßstäbe R_g mit zumindest schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion g , d.h.:

$$\forall X, Y \in M_n^+: R_L(Y, X) \implies R_g(Y, X)$$

Jeder lineare Verteilungsmaßstab ergänzt den Lorenz-Maßstab zu einer vollständigen Ordnungsrelation.

Beweis: Aus $R_L(Y, X)$ folgt gemäß der Definition des Lorenz-Maßstabes:

$$\forall p_i: L_Y(p_i) - L_X(p_i) \geq 0$$

$$\text{woraus: } \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) dg(p_{i+1}) \geq 0$$

oder $R_g(Y, X)$ resultiert, was zu beweisen war.

-
- (1) Eine Ordnungsrelation R_1 ist Subrelation einer Ordnungsrelation R_2 , wenn aus $R_1(Y, X)$ stets $R_2(Y, X)$ folgt. Sind R_1 und R_2 schwache Ordnungsrelationen und ist R_1 Subrelation von R_2 , so muß jedoch nicht $P_1(Y, X)$ auch $P_2(Y, X)$ implizieren, wobei P_1 und P_2 die aus R_1 und R_2 abgeleiteten strikten, totalen Ordnungen sind. Dazu die ergänzende Definition: Eine schwache Ordnungsrelation R_1 ist strikte Subrelation einer schwachen Ordnungsrelation R_2 , wenn aus $R_1(Y, X)$ stets $R_2(Y, X)$ und zusätzlich aus $P_1(Y, X)$ stets $P_1(Y, X)$ folgt.

Aus dieser wesentlichen Eigenschaft linearer Maßstäbe können wir nun unmittelbar weitere Merkmale ableiten:

Korollar: Alle linearen Maßstäbe sind Paritätsmaßstäbe:

$$\forall X \in R_n^+ \Rightarrow R_g(X_g, X)$$

Korollar: Alle linearen Maßstäbe sind symmetrisch:

$$\forall X \in R_n^+ \text{ und } \forall \Pi \Rightarrow I_g(X, \Pi)$$

Korollar: Alle linearen Maßstäbe sind global gleichheitspräferierend:

$$\forall X \in R_n^+ \text{ und } \forall \beta \in [0, 1] \Rightarrow R_g(\beta X_g + (1-\beta)X, X)$$

Korollar: Alle linearen Maßstäbe sind lokal gleichheitspräferierend:

$$\forall X \in R_n^+ \text{ und } \forall \beta \in [0, 1] \Rightarrow R_g(\beta X' + (1-\beta)X, X)$$

wobei für die Komponenten der Verteilung X' gilt:

$$x'_i = x_i \text{ für alle } i \neq k, 1; x'_k = x'_1 = \frac{x_k + x_1}{2}$$

Korollar: Alle linearen Maßstäbe sind quasikonkav bezüglich Verteilungen mit der gleichen Merkmalssumme:

$$\forall X, Y \in R_n^+ \text{ mit } M(X) = M(Y) \text{ und } \forall \beta \in [0, 1] :$$

$$R_g(Y, X) \Rightarrow R_g(\beta Y + (1-\beta)X, X)$$

Korollar: Alle linearen Maßstäbe sind S-konkav:

$$\forall X \in R_n^+ \text{ und } \forall \lambda \Rightarrow R_g(X, \lambda X)$$

Korollar: Gleiche proportionale Zuwächse lassen die Disparität unverändert, d.h. für alle linearen Maßstäbe gilt:

$$\forall X \in R_n^+ \text{ und } \forall \lambda > 1 \Rightarrow I_g((x_1 + \lambda x_1, \dots, x_n + \lambda x_n), X)$$

Für lineare Verteilungsmaßstäbe mit ausschließlich strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktionen behaupten wir zusätzlich:

Satz: Der Lorenz-Maßstab R_L ist strikte Subrelation aller linearen Maßstäbe R_g mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion g , d.h.:

$$\forall X, Y \in R_n^+ : R_L(Y, X) \Rightarrow R_g(Y, X) \text{ und } P_L(Y, X) \Rightarrow P_g(Y, X)$$

Beweis: Wir müssen im Hinblick auf den vorangegangenen Satz nur noch die Implikation $P_L(Y, X) \Rightarrow P_g(Y, X)$ zeigen. Nun folgt aus $P_L(Y, X)$ gemäß der Definition des strikten Lorenz-Maßstabes P_L :

$$\exists p_i : L_Y(p_i) - L_X(p_i) > 0$$

Da g strikt monoton wachsend ist, folgt somit $Dg(p_i) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$, was aber:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) Dg(p_{i+1}) > 0$$

oder $P_g(Y, X)$ impliziert und zu beweisen war.

Als Konsequenz dieses Satzes dürfen wir alle Ergebnisse der Abschnitte 3.3. und 3.4. auf lineare Maßstäbe mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion übertragen. Speziell wollen wir noch festhalten:

Korollar: Gleiche absolute Zuwächse wirken nivellierend, d.h. für alle linearen Maßstäbe R_g mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion g gilt:

$$\forall X \in R_n^+ (X \neq X_g) \text{ und } \forall x_0 > 0 \Rightarrow P_g((x_1 + x_0, \dots, x_n + x_0), X)$$

Sie genügen damit Dalton's Prinzip absoluter Einkommenszuwächse.

Aus der Tatsache, daß der Lorenz-Maßstab Subrelation aller linearen Verteilungsmaßstäbe mit zumindest schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion ist, können wir aber auch auf einige Charakteristika linearer Verteilungsmaße schließen. Wir nützen dazu den Sachverhalt aus, daß die zu einem linearen Maßstab R_g inverse Ordnungsrelation R_g^{-1} gerade mit der aus dem linearen Maß G_g abgeleiteten Ordnungsrelation R_{G_g} äquivalent ist, vorausgesetzt, R_g und G_g werden von der gleichen Gewichtsfunktion g gebildet (1). Dazu das folgende Korollar:

Korollar: Für alle linearen Verteilungsmaße G_g mit zumindest schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion g gilt:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{M}_n^+: R_L(Y, X) \implies G_g(X) \geq G_g(Y)$$

Liegt die Lorenz-Kurve einer Verteilung Y teilweise oder ganz über der Lorenz-Kurve einer Verteilung X bzw. fallen beide Lorenz-Kurven gerade zusammen, so ordnet also jedes lineare Verteilungsmaß G_g unabhängig von der spezifischen Form der verwendeten Gewichtsfunktion g der Verteilung X einen Maßwert $G_g(X)$ zu, der mindestens so groß ist als der Maßwert $G_g(Y)$ der Verteilung Y .

Beweis: Aus der Voraussetzung $R_L(Y, X)$ folgt zunächst für jeden linearen Verteilungsmaßstab nach vorstehendem Satz $R_g(Y, X)$. Damit ist aber das geordnete Paar (X, Y) in der zu R_g inversen Ordnungsrelation R_g^{-1} enthalten, was äquivalent zu $R_{G_g}(X, Y)$ ist. Dies impliziert aber $G_g(X) \geq G_g(Y)$, was zu beweisen war.

(1) Siehe dazu Abschnitt 4.1. dieser Arbeit.

Aus diesem Korollar folgen nun weitere Charakteristika, darunter zunächst der schon bekannte Sachverhalt (1):

Korollar: Alle linearen Maße nehmen ihr Minimum für die extreme Gleichverteilung X_g an:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : G_g(X) \geq G_g(X_g) = 0$$

wir dürfen daher jedes lineare Maß G_g als Disparitätsmaß bezeichnen. Piesch schreibt (2):

"Bei Gleichverteilung ist keine Disparität vorhanden; ein Disparitätsmaß sollte in diesem Fall den Wert Null liefern."

Weiterhin können wir schließen:

Korollar: Alle linearen Maße sind symmetrisch (3):

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \forall \Pi : G_g(X) = G_g(X\Pi)$$

Korollar: Gleiche proportionale Zuwächse lassen die Disparität unverändert, d.h. für alle linearen Maße gilt:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \lambda > -1 : G_g(X) = G_g(x_1 + \lambda x_1, \dots, x_n + \lambda x_n)$$

Lineare Maße sind damit homogen vom Grad Null und sind damit als relative Verteilungsmaße interpretierbar (4).

(1) Siehe dazu Abschnitt 4.1. dieser Arbeit.

(2) W. Piesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 7f.

(3) Eine Funktion f ist symmetrisch, wenn für alle X und alle Permutationsmatrizen Π gilt: $f(X) = f(X\Pi)$.

(4) relative Verteilungsmaße sind invariant bezüglich proportionaler Änderungen der Merkmalsskala. Siehe dazu auch:

C. Blackorby und D. Donaldson, Measures of Relative Equality and Their Meaning in Terms of Social Welfare, Journal of Economic Theory, Vol. 18, 1978, S. 59

Kolm bezeichnet diese Eigenschaft als "intensive inequality". Vgl. S.-C. Kolm, Unequal Inequalities I, a.a.O., S. 426

Setzen wir nämlich $\hat{1} = 1-1$, so folgt unmittelbar:

$$\forall X \in K_n^+ \text{ und } \forall \hat{1} > 0: G_g(X) = G_g(\hat{1}x_1, \hat{1}x_2, \dots, \hat{1}x_n)$$

d.h. jedes lineare Maß ist in X homogen nullten Grades.

Korollar: Alle linearen Maße sind global ungleichheitspräferierend (1):

$$\forall X \in K_n^+ \text{ und } \forall \beta \in [0, 1]: G_g(X) \geq G_g(\beta X_g + (1-\beta)X)$$

Korollar: Alle linearen Maße sind lokal ungleichheitspräferierend (2):

$$X \in K_n^+ \text{ und } \forall \beta \in [0, 1]: G_g(X) \geq G_g(\beta X' + (1-\beta)X)$$

wobei für die Komponenten der Verteilung X' gilt:

$$x'_i = x_i \text{ für alle } i \neq k, 1; x'_k = x'_1 = \frac{x_k + x_1}{2}$$

Korollar: Alle linearen Maße sind S -konvex (3):

$$\forall X \in K_n^+ \text{ und } \forall Q: G_g(X) \geq G_g(XQ)$$

Korollar: Alle linearen Maße sind quasikonvex bezüglich aller Verteilungen mit der gleichen Merkmals-summe (4):

$$\forall X, Y \in K_n^+ \text{ mit } h(X) = h(Y) \text{ und } \forall \beta \in [0, 1]:$$

$$G_g(\beta X + (1-\beta)Y) \leq \max\{G_g(X), G_g(Y)\}$$

(1) Eine Funktion f ist global ungleichheitspräferierend, wenn $f(X) \geq f(\beta X_g + (1-\beta)X)$ für alle X und alle $\beta \in [0, 1]$ gilt.

(2) Eine Funktion f ist lokal ungleichheitspräferierend, wenn $f(X) \geq f(\beta X' + (1-\beta)X)$ für alle X und alle $\beta \in [0, 1]$ gilt. Siehe die dazu analogen Definitionen global bzw. lokal gleichheitspräferierender Funktionen in:

M. Rothschild und J. E. Stiglitz, Some Further Results in the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 194 ff.

(3) Eine Funktion f ist S -konvex, wenn $f(X) \geq f(XQ)$ für alle X und alle bistochastischen Matrizen Q gilt.

(4) Eine Funktion f ist quasikonvex, wenn für alle X und alle $\beta \in [0, 1]$ gilt: $f(\beta X + (1-\beta)Y) \leq \max\{f(X), f(Y)\}$.

Da lineare Maße im Gegensatz zu linearen Maßstäben strikt kardinal sind, können wir ergänzend nach ihren Konvexitätseigenschaften fragen:

Satz: Alle linearen Maße G_g sind konvex (1) bezüglich aller Verteilungen mit der gleichen Merkmalssumme:

$$\forall X, Y \in R_n^+ \text{ mit } M(X) = M(Y) \text{ und } \forall \beta \in [0, 1]:$$

$$G_g(\beta X + (1-\beta)Y) \leq \beta G_g(X) + (1-\beta)G_g(Y)$$

Beweis: Wir haben die Richtigkeit der Ungleichung:

$$G_g(\beta X + (1-\beta)Y) \leq \beta G_g(X) + (1-\beta)G_g(Y)$$

zu zeigen. Benützen wir die herkömmliche Darstellung linearer Verteilungsmaße:

$$G_g(X) = M(X)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m(X))g(p_i)$$

und definieren die Verteilung Z mit $Z = \beta X + (1-\beta)Y$, wobei

$$M(Z) = \beta M(X) + (1-\beta)M(Y) = M(X) = M(Y)$$

gilt, so müssen wir nur noch die Richtigkeit von:

$$\sum_{i=1}^n z_i g(p_i) = \beta \sum_{i=1}^n x_i g(p_i) + (1-\beta) \sum_{i=1}^n y_i g(p_i)$$

nachweisen. Dazu betrachten wir die geordnete Verteilung Z^0 die wir mit Hilfe der Permutationsmatrix $\Pi(Z)$ erhalten:

$$Z^0 = Z\Pi(Z) = \beta X\Pi(Z) + (1-\beta)Y\Pi(Z)$$

Definieren wir x_{ij} als i -te Komponente von $X\Pi(Z)$

(1) Eine Funktion f ist konvex, wenn für alle X, Y und alle $\beta \in [0, 1]$ gilt: $f(\beta X + (1-\beta)Y) \leq \beta f(X) + (1-\beta)f(Y)$.

und $y_{i,j}$ als i -te Komponente von $Y_{II}(Z)$, so ergibt sich die Komponente $z_{(i)}$ des Vektors Z^0 aus:

$$z_{(i)} = bx_{i,j} + (1-b)y_{i,j}$$

$$\text{woraus: } \sum_{i=1}^n z_{(i)} g(p_i) = \sum_{i=1}^n (bx_{i,j} + (1-b)y_{i,j}) g(p_i)$$

folgt. Nun ist die gewichtete Summe $\sum_{i=1}^n x_{i,j} g(p_i)$ maximal, wenn die Komponenten des Vektors X gerade der Merkmalsgröße nach geordnet sind, d.h. wenn $x_{i,j} = x_{(i)}$ gilt (1). Für die gewichtete Summe $\sum_{i=1}^n y_{i,j} g(p_i)$ gilt entsprechendes, woraus die beiden Abschätzungen:

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} g(p_i) \leq \sum_{i=1}^n x_{(i)} g(p_i)$$

$$\sum_{i=1}^n y_{i,j} g(p_i) \leq \sum_{i=1}^n y_{(i)} g(p_i)$$

resultieren. Daraus erhalten wir unmittelbar:

$$\sum_{i=1}^n (bx_{i,j} + (1-b)y_{i,j}) g(p_i) \leq \sum_{i=1}^n (bx_{(i)} + (1-b)y_{(i)}) g(p_i)$$

$$\text{oder: } \sum_{i=1}^n z_{(i)} g(p_i) \leq b \sum_{i=1}^n x_{(i)} g(p_i) + (1-b) \sum_{i=1}^n y_{(i)} g(p_i)$$

was zu beweisen war.

(1) Dies geht besonders deutlich aus der Schreibweise:

$$\sum_{i=1}^n x_{(i)} g(p_i) = \sum_{i=1}^n x_{(n+1-i)}^{(1)} p_{n+1-i}$$

hervor. Das größte Gewicht wird im Fall der geordneten Verteilung mit der größten Komponente, das zweitgrößte Gewicht mit der zweitgrößten Komponente usw. multipliziert.

sind die beiden Verteilungen X und Y von vornherein geordnet, d.h. gilt $X = X^0$ und $Y = Y^0$, so folgt:

$$g_g(BX^0 + (1-B)Y^0) = Bg_g(X^0) + (1-B)g_g(Y^0)$$

d.h. lineare Maße können nicht strikt konvex (1) sein.

wenden wir uns abschließend linearen Maßen mit ausschließlich strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktionen zu:

Korollar: Für alle linearen Maße G_g mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion g gilt:

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : R_L(Y, X) &\implies G_g(X) \geq G_g(Y) \\ P_L(Y, X) &\implies G_g(X) > G_g(Y) \end{aligned}$$

Unabhängig von der jeweiligen Gestalt der verwendeten strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktion g ordnet also jedes lineare Maß G_g einer Verteilung X einen größeren Maßwert zu wie einer Verteilung Y , falls die Lorenz-Kurve L_X teilweise oder ganz überhalb der Lorenz-Kurve L_Y liegt

Beweis: Wir müssen nur noch die Richtigkeit der Implikation $P_L(Y, X) \implies G_g(X) > G_g(Y)$ zeigen. Zunächst folgt aus der Voraussetzung $P_L(Y, X)$ für jeden linearen Maßstab mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion g die Aussage $P_g(Y, X)$. Damit ist aber das geordnete Paar (X, Y) in der zu P_g inversen strikten Ordnungsrelation P_g^{-1} enthalten, was $P_{G_g}(X, Y)$ impliziert (2). Aus $P_{G_g}(X, Y)$ folgt dann unmittelbar $G_g(X) > G_g(Y)$, was zu beweisen war.

-
- (1) Eine Funktion f ist strikt konvex, wenn für alle X, Y und alle $B \in (0, 1)$ gilt: $f(BX + (1-B)Y) < Bf(X) + (1-B)f(Y)$.
- (2) Die strikte Ordnungsrelation P_{G_g} ist definiert mit:
 $\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : P_{G_g}(X, Y) \iff R_{G_g}(X, Y)$ und nicht $R_{G_g}(Y, X)$.

4.3. Durchschnittsrelationen linearer Maßstäbe und der Lorenz-Maßstab

In Abschnitt 4.1. konstruierten wir aus der Grundidee des Lorenz-Verteilungsmaßstabes eine Klasse linearer Verteilungsmaßstäbe, die den Lorenz-Maßstab als Subrelation wenn nicht sogar als strikte Subrelation enthielten. Die Motivation dazu lieferte die offensichtliche Unvollständigkeit des Lorenz-Maßstabes: Jeder lineare Maßstab ergänzt die unvollständige Lorenz-Ordnung zu einer vollständigen Ordnungsrelation.

Andererseits liegt in der Vollständigkeit linearer Verteilungsmaßstäbe auch ein gewisses Element der Willkür: Entsprechend der jeweiligen Spezifikation der Gewichtsfunktion können wir gänzlich unterschiedliche Rangordnungen über den Verteilungspaaren erhalten, deren Lorenzkurven sich schneiden. Diesem Vorwurf begegnen wir nun durch die Einführung einer "Durchschnittsrelation" linearer Maßstäbe (2):

Def.: Gegeben seien r zumindest schwach monoton wachsende Gewichtsfunktionen g_j ($j = 1, \dots, r$). Dann verstehen wir unter der Durchschnittsrelation $R_{\bar{g}_r}$ einen Verteilungsmaßstab, der aus den r linearen Maßstäben R_{g_j} gemäß der Vorschrift:

$$\forall x, y \in R_n^+ : R_{\bar{g}_r}(x, y) \Leftrightarrow \forall g_j : R_{g_j}(x, y) \quad j = 1, \dots, r$$

gebildet wird.

(1) siehe dazu Abschnitt 4.2. dieser Arbeit.

(2) Das Konzept, Durchschnitt vollständiger Ordnungsrelationen zur Disparitätsmessung heranzuziehen, geht auf Sen zurück. Vgl. dazu Definition (3.1c) in: A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 72

Die so definierte Durchschnittsrelation $R_{\emptyset r}$ ist reflexiv und transitiv:

$$\begin{aligned} \text{Zunächst gilt für alle } X \in \mathbb{R}_n^+ : & \bigvee_{\mathfrak{S}_j} : R_{\mathfrak{S}_j}(X, X) \\ & j = 1, \dots, r \\ & \implies R_{\emptyset r}(X, X) \end{aligned}$$

womit die Reflexivität von $R_{\emptyset r}$ nachgewiesen wäre.

Die Transitivität folgt aus der Überlegung:

$$\begin{aligned} \bigvee X, Y, Z \in \mathbb{R}_n^+ : & R_{\emptyset r}(X, Y) \text{ und } R_{\emptyset r}(Y, Z) \\ \implies & \bigvee_{\mathfrak{S}_j} : R_{\mathfrak{S}_j}(X, Y) \text{ und } R_{\mathfrak{S}_j}(Y, Z) \\ & j = 1, \dots, r \\ \implies & \bigvee_{\mathfrak{S}_j} : R_{\mathfrak{S}_j}(X, Z) \text{ da alle } R_{\mathfrak{S}_j} \text{ transitiv!} \\ & j = 1, \dots, r \\ \implies & R_{\emptyset r}(X, Z) \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Weiterhin halten wir fest:

Korollar: Gegeben seien r zumindest schwach monoton wachsende Gewichtsfunktionen $\mathfrak{S}_j$. Dann ist die Lorenz-Relation R_L Subrelation der aus r linearen Verteilungsmaßstäben $R_{\mathfrak{S}_j}$ gebildeten Durchschnittsrelation $R_{\emptyset r}$, d.h.: $\mathfrak{S}_j$

$$\bigvee X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : R_L(X, Y) \implies R_{\emptyset r}(X, Y)$$

Der Beweis des Korollars ergibt sich unmittelbar aus der Tatsache, daß die Lorenz-Relation Subrelation aller linearen Verteilungsmaßstäbe mit zumindest schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen ist.

Aus jeder Durchschnittsrelation $R_{\emptyset r}$ läßt sich eine strikte Durchschnittsrelation $P_{\emptyset r}$ ableiten:

Def.: Gegeben seien r zumindest schwach monoton wachsende Gewichtsfunktionen g_j ($j = 1, \dots, r$). Dann verstehen wir unter der strikten Durchschnittsrelation $P_{\emptyset r}$ einen strikten Verteilungsmaßstab, der nach der Regel:

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in R_n^+ : P_{\emptyset r}(X, Y) &\Leftrightarrow R_{\emptyset r}(X, Y) \text{ und nicht } R_{\emptyset r}(Y, X) \\ &\Leftrightarrow \forall g_j : R_{g_j}(X, Y) \text{ und nicht } R_{g_j}(Y, X) \\ &\Leftrightarrow \forall g_j : R_{g_j}(X, Y) \text{ und } \exists g_j : P_{g_j}(X, Y) \\ &\quad j = 1, \dots, r \end{aligned}$$

gebildet wird.

Speziell für monoton strikt wachsende Gewichtsfunktionen gilt dann:

Korollar: Gegeben seien r strikt monoton wachsende Gewichtsfunktionen g_j ($j = 1, \dots, r$). Dann ist die Lorenz-Relation R_L strikte Subrelation der aus r linearen Verteilungsmaßstäben R_{g_j} gebildeten Durchschnittsrelation $R_{\emptyset r}$, d.h.: $R_{\emptyset r}$

$$\begin{aligned} \forall X, Y \in R_n^+ : R_L(X, Y) &\Rightarrow R_{\emptyset r}(X, Y) \\ P_L(X, Y) &\Rightarrow P_{\emptyset r}(X, Y) \end{aligned}$$

Für Durchschnittsrelationen $R_{\emptyset r}$ aus linearen Verteilungsmaßstäben mit strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktionen ist also zusätzlich der strikte Lorenz-Maßstab P_L Subrelation der zugehörigen strikten Durchschnittsrelationen $P_{\emptyset r}$.

Da die Lorenz-Relation strikte Subrelation aller linearen Verteilungsmaßstäbe mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion ist (1), ist somit die Richtigkeit des vorstehenden Korollars evident.

o vorteilhaft Durchschnittsrelationen einerseits auch sind, indem sie die ausschließliche Bezugnahme auf einen Verteilungsmaßstab vermeiden, so ist andererseits ihr Mangel an Vollständigkeit kritisch zu vermerken. Das Ausmaß ihrer Unvollständigkeit hängt zum einen davon ab, in welchem Umfang die in ihnen aufgenommenen Ordnungsrelationen konfligierende Einstufungen vornehmen, zum anderen aber auch von der Anzahl der sie konstituierenden Verteilungsmaßstäbe selbst (2).

Beziehen wir immer mehr lineare Maßstäbe in die Durchschnittsrelation $R_{\emptyset}$ ein, so liegt die Vermutung nahe, daß schließlich die Unvollständigkeit des Lorenz-Maßstabes erreicht wird. Dazu definieren wir zunächst die Durchschnittsrelation $R_{\emptyset}$ aller linearen Maßstäbe mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion:

Def: Unter der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset}$ aller linearen Maßstäbe mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion verstehen wir einen Verteilungsmaßstab, der nach der Vorschrift:

$$\forall X, Y \in R_n^+: R_{\emptyset}(X, Y) \Leftrightarrow \forall g: R_g(X, Y)$$

gebildet wird.

Gilt also unabhängig von der spezifischen Gestalt der Gewichtsfunktion g (vorausgesetzt, sie ist strikt monoton wachsend) $R_g(X, Y)$, so ist das geordnete Paar (X, Y) in der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset}$ enthalten.

(1) Siehe dazu Abschnitt 4.2. dieser Arbeit.

(2) Vgl. A.K.sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 72.

Dann können wir den folgenden Satz aufstellen:

Satz: Der Lorenz-Verteilungsmaßstab R_L ist mit der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset}$ aller linearer Verteilungsmaßstäbe mit strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktionen äquivalent. d.h.:

$$\forall X, Y \in I_n^+: \quad R_L(X, Y) \iff R_{\emptyset}(X, Y)$$

Notwendig und hinreichend für die Aussage $R_L(X, Y)$ ist also, daß das geordnete Verteilungspaar (X, Y) in der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset}$ enthalten ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst die Notwendigkeit:

Da die Lorenz-Relation R_L strikte Subrelation aller beliebigen linearen Verteilungsmaßstäbe mit strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktionen g ist, gilt:

$$\forall X, Y \in I_n^+: \quad R_L(X, Y) \Rightarrow \forall g: R_g(X, Y)$$

$$\text{und damit: } \Rightarrow R_{\emptyset}(X, Y)$$

was zu beweisen war.

Für den Beweis der Suffizienz geben wir uns zunächst die folgende zwei-parametrische Familie von strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktionen vor mit:

$$g_{B,k}(p_i) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für alle } i \leq k \\ \frac{1}{n} R & \text{für alle } i > k \end{cases}$$

Dabei ist die Funktion $g_{B,k}$ für alle Werte des Parameters R aus dem Intervall $[1, +\infty)$ strikt monoton wachsend. Ferner kann der Parameter k alle natürlichen Zahlen zwischen 1 und $n-1$ durchlaufen.

unter Verwendung der Gewichtsfunktion $S_{B,k}$ erhalten wir die zwei-parametrische rationale lineare Verteilungsmasse $R_{B,k}$ mit:

$$\forall x, Y \in R_n^+: p_{B,k}(Y, X) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) S_{B,k}(p_{i+1}) \geq 0$$

Wir zeigen nun, dass die Aussage "nicht $R_L(Y, X)$ " die Aussage "nicht $R_{B,k}(Y, X)$ " impliziert.

Zunächst ist die Aussage "nicht $R_L(Y, X)$ " äquivalent mit:

$$\exists i: \forall k: L_Y(p_k) - L_X(p_k) < 0$$

$$\text{und: } L_Y(p_k) - L_X(p_k) < 0$$

d.h. entweder gilt $R_L(X, Y)$ oder aber die Lorenz-Kurven der beiden Verteilungen schneiden sich.

Wenden wir nun auf ein spezifisches Verteilungspaar (L, X) , für das "nicht $R_L(Y, X)$ " zutrifft, den linearen Verteilungsmassstab $R_{B,k}$ an, so erhalten wir den Ausdruck A:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{K-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \frac{1}{n} + B \sum_{i=k}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \frac{1}{n} \\ &= A(L_Y(p_K) - L_X(p_K)) \left(\frac{K+1}{n} - \frac{k}{n} \right) \\ &+ (L_Y(p_K) - L_X(p_K)) \left(\frac{K+1}{n} - \frac{k}{n} \right); \text{ woraus sich:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{K-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \frac{1}{n} + B \sum_{i=k}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \frac{1}{n} \\ &+ (L_Y(p_K) - L_X(p_K)) \frac{k}{n} (B-1) \quad \text{ergibt. Für alle } B > 1 \end{aligned}$$

sind die letzten beiden Summanden stets negativ, während das Vorzeichen des ersten Summanden unbestimmt ist.

Nun treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

Fall 1:
$$\sum_{i=1}^{k-1} (I_Y(p_i) - I_X(p_i)) < \sum_{i=k}^{n-1} (I_X(p_i) - I_Y(p_i))$$

wählen wir für den Parameter B den Wert Eins, so erhalten wir für den Ausdruck α :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k-1} (I_Y(p_i) - I_X(p_i)) \frac{1}{n} < 0$$

woraus für den linearen Maßstab $R_{\mathcal{E}_{1,k}}$ die Aussagen $R_{\mathcal{E}_{1,k}}(Y, X)$ und damit "nicht $R_{\mathcal{E}_{1,k}}(X, Y)$ " folgen, was unmittelbar "nicht $R_{\mathcal{Q}}(Y, X)$ " impliziert.

Fall 2:
$$\sum_{i=1}^{k-1} (I_Y(p_i) - I_X(p_i)) > \sum_{i=k}^{n-1} (I_X(p_i) - I_Y(p_i))$$

Wählen wir in diesem Fall für den Parameter B den Wert α :

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (I_Y(p_i) - I_X(p_i))}{\sum_{i=k}^{n-1} (I_X(p_i) - I_Y(p_i))} > 1$$

so erhalten wir für den Ausdruck α :

$$\alpha = (I_X(p_k) - I_X(p_{k-1})) \frac{k}{n} (\alpha - 1) \wedge \alpha$$

woraus für den linearen Maßstab $R_{\mathcal{E}_{\alpha,k}}$ die Aussagen $R_{\mathcal{E}_{\alpha,k}}(X, Y)$ und damit "nicht $R_{\mathcal{E}_{\alpha,k}}(Y, X)$ " folgen, woraus wiederum "nicht $R_{\mathcal{Q}}(Y, X)$ " folgt.

$$\text{Fall 3: } \sum_{i=1}^{k-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) = \sum_{i=k}^{n-1} (L_X(p_i) - L_Y(p_i))$$

Setzen wir jetzt für den Parameter β den Wert $1+c$ mit $c > 0$, so resultiert für den Ausdruck A :

$$A = \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \frac{c}{n} + (L_Y(p_k) - L_X(p_k)) \frac{c+1}{n} < 0$$

woraus für den spezifischen linearen Maßstab

$R_{g_{1+c,k}}$ die Aussagen $P_{g_{1+c}}(X,Y)$ und damit

"nicht $R_{g_{1+c,k}}(Y,X)$ " folgen, was "nicht $R_{\emptyset}(Y,X)$ " impliziert.

Fassen wir zusammen:

Geht man von einem beliebigen geordneten Verteilungspaar (Y,X) aus, für das die Aussage "nicht $R_L(Y,X)$ " zutrifft, so kann man aus der zwei-parametrischen Familie linearer Verteilungsmaßstäbe stets einen spezifischen Maßstab $R_{g_{\beta,k}}$ angeben, für den die Aussage "nicht $R_{g_{\beta,k}}(Y,X)$ " zutreffend ist, d.h.:

$$\text{"nicht } R_L(Y,X) \Rightarrow \exists g_{\beta,k} : \sum_{i=1}^{k-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \beta g_{\beta,k}(p_{i+1}) < 0$$

$$\Rightarrow \exists R_{g_{\beta,k}} : \text{"nicht } R_{g_{\beta,k}}(Y,X) \text{"}$$

Damit kann das geordnete Paar (Y,X) nicht in der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset}$ aller linearer Verteilungsmaßstäbe mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion sein, d.h. die Aussage "nicht $R_L(Y,X)$ " impliziert die Aussage "nicht $R_{\emptyset}(Y,X)$ ". Dies ist aber logisch äquivalent mit: $R_{\emptyset}(Y,X) \Rightarrow R_L(Y,X)$, was zu beweisen war.

Die Beschränkung der Analyse auf lineare Maßstäbe mit strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktionen ist jedoch nicht zwingend notwendig. Dazu definieren wir zunächst:

Def.: Unter der Durchschnittsrelation $R_\emptyset$ aller linearen Verteilungsmaßstäbe mit schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen verstehen wir einen Verteilungsmaßstab, der nach der Vorschrift:

$$\forall X, Y \in R_n^+: \quad R_\emptyset(X, Y) \iff \forall g: \quad R_g(X, Y)$$

und g schwach monoton wachsend.

gebildet wird. Ist also unabhängig von der numerischen Spezifikation der Gewichtsfunktion g (vorausgesetzt, sie ist schwach monoton wachsend) die Aussage $R_g(X, Y)$ zutreffend, so ist das geordnete Verteilungspaar (X, Y) in der Durchschnittsrelation $R_\emptyset$ enthalten.

Dann können wir den folgenden Satz beweisen:

Satz: Der Lorenz-Verteilungsmaßstab R_L ist mit der Durchschnittsrelation $R_\emptyset$ aller linearer Verteilungsmaßstäbe mit schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen äquivalent, d.h.:

$$\forall X, Y \in R_n^+: \quad R_L(X, Y) \iff R_\emptyset(X, Y)$$

Notwendig und hinreichend für die Aussage $R_L(X, Y)$ ist also, daß das geordnete Verteilungspaar (X, Y) in der Durchschnittsrelation $R_\emptyset$ enthalten ist.

Die Aussage $R_L(X, Y)$ impliziert also $R_g(X, Y)$ unabhängig von der Spezifikation der verwendeten schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktion. Umgekehrt folgt aus der Aussage $R_g(X, Y)$ für alle schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen unmittelbar $R_L(X, Y)$.

Beweis: Wir zeigen zunächst wieder die Notwendigkeit:

Da die Lorenz-Relation R_L Subrelation aller beliebigen linearen Verteilungsmatrizen mit schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen g ist, gilt:

$$\forall X, Y \in P_n^+: \quad (X, Y) \implies \forall g: \quad R_g(X, Y)$$

$$\text{und damit: } \implies R_\emptyset(X, Y)$$

was zu beweisen war.

In die umgekehrte Beweisrichtung setzen wir uns zunächst als Lemma ein Hilfssatz. Eine von schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen g ist:

$$g_k(p_i) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } p_i \leq k \\ \frac{i}{n} & \text{für } p_i > k \end{cases}$$

Der Parameter k kann dabei alle natürlichen Zahlen zwischen 1 und $n-1$ durchlaufen.

Unter Verwendung der Gewichtsfunktion g_k erhalten wir die ein-verstärkte Lorenz-Relation R_{g_k} (Lorenz-Verteilungsrelation R_{g_k} mit:

$$\forall X, Y \in P_n^+: \quad R_{g_k}(Y, X) \iff \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) g_k(p_{i+1}) \geq 0$$

Wir haben zu zeigen: Aus der Aussage "nicht $R_L(Y, X)$ " folgt die Aussage "nicht $R_{g_k}(Y, X)$ ". Wir verwenden also die Beweisidee des vorangegangenen Satzes.

Zunächst ist die Voraussetzung "nicht $R_L(Y, X)$ " äquivalent mit:

$$\exists k: \forall i \geq k: \quad L_Y(p_i) - L_X(p_i) \leq 0 \\ \text{und:} \quad L_Y(p_k) - L_X(p_k) < 0$$

Wenden wir auf ein spezifisches Verteilungspaar (Y, X) , für das "nicht $R_L(Y, X)$ " zutrifft, den linearen Verteilungsmaßstab R_{g_k} an, so erhalten wir den Ausdruck:

$$\sum_{i=k+1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \frac{1}{n} + (L_Y(p_k) - L_X(p_k)) \frac{k}{n} < 0$$

woraus für den linearen Maßstab R_{g_k} die Aussagen $P_{g_k}(X, Y)$ und damit "nicht $R_{g_k}(Y, X)$ " folgen, was unmittelbar die Aussage "nicht $R_{\emptyset}(Y, X)$ " impliziert.

Fassen wir wieder zusammen:

Geht man von einem beliebigen geordneten Verteilungspaar (Y, X) aus, für das die Aussage "nicht $R_L(Y, X)$ " zutrifft, so kann man aus der ein-parametrischen Familie linearer Verteilungsmaßstäbe immer einen spezifischen Maßstab R_{g_k} angeben, für den die Aussage "nicht $R_{g_k}(Y, X)$ " zutreffend ist, d.h.:

$$\text{"nicht } R_L(Y, X) \Rightarrow \exists g_k: \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \frac{1}{n} < 0 \\ \Rightarrow \exists R_{g_k}: \text{"nicht } R_{g_k}(Y, X) \text{"}$$

Damit kann das geordnete Paar (Y, X) nicht in der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset}$ aller linearen Verteilungsmaßstäbe mit schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion sein, d.h. die Aussage "nicht $R_L(Y, X)$ " impliziert die Aussage "nicht $R_{\emptyset}(Y, X)$ ". Dies ist aber wieder logisch äquivalent mit $R_{\emptyset}(Y, X) \Rightarrow R_L(Y, X)$, was zu beweisen war.

Nun wir die Ergebnisse der vorstehenden Analyse nochmals zusammenfassen, wollen wir den Begriff der Durchschnittsrelation R_{φ} auf die Menge aller mit zumindest schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen definieren:

Sei φ eine Gewichtsfunktion, die $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ für $x < y$ impliziert. Dann ist R_{φ} die Durchschnittsrelation aller linearer Maßstäbe, die nach der Vorschrift:

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2: \quad (i, j) \in R_{\varphi} \iff \varphi(i) \leq \varphi(j)$$

definiert wird, ist also unabhängig von der Spezifikation der Gewichtsfunktion φ (vorausgesetzt, die ist zumindest schwach monoton wachsend) die Aussage $R_{\varphi}(i, j)$ Satzverfeine, so ist das geordnete Verteilungspaar (i, j) in der Durchschnittsrelation R_{φ} enthalten.

Dann können wir unsere Ergebnisse in folgender Weise zusammenfassen:

Korollar: Ist eine der folgenden Aussagen wahr, so sind es auch alle anderen:

- $R_{\varphi}(X, Y)$, d.h. (X, Y) ist in der Durchschnittsrelation enthalten.
- $R_{\varphi}(X, Y)$, d.h. (X, Y) ist in der Durchschnittsrelation aller linearen Maßstäbe mit schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion enthalten.
- $R_{\varphi}(X, Y)$, d.h. (X, Y) ist in der Durchschnittsrelation aller linearen Maßstäbe mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion enthalten.
- $R_{\varphi_{\text{und}\varphi}}(X, Y)$, d.h. (X, Y) ist in der Durchschnittsrelation aller linearer Maßstäbe mit zumindest schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion enthalten.

Die Ergebnisse unserer Analyse können wir nun direkt auf lineare Verteilungsmaße übertragen:

Korollar: Folgende Aussagen sind einander äquivalent:

- a) $R_L(X,Y)$, d.h. das geordnete Paar (X,Y) ist in der Lorenz-Relation R_L enthalten.
- b) $G_g(Y) \geq G_g(X)$ für alle linearen Maße mit strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktionen g .
- c) $G_g(Y) \geq G_g(X)$ für alle linearen Maße mit schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen g .
- d) $G_g(Y) \geq G_g(X)$ für alle linearen Maße mit zumindest schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen g .

Korollar: Folgende Aussagen sind einander äquivalent:

- a) $P_L(X,Y)$, d.h. das geordnete Paar (X,Y) ist in der strikten partiellen Lorenz-Ordnung P_L enthalten.
- b) $G_g(Y) > G_g(X)$ für alle linearen Maße mit strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktionen g .

Die Aussage $R_L(X,Y)$ impliziert also $R_g(X,Y)$ bzw. $G_g(Y) \geq G_g(X)$ für alle linearen Maßstäbe und Maße unabhängig von der spezifischen Gestalt der verwendeten Gewichtsfunktion, sofern diese zumindest schwach monoton wachsend ist.

Umgekehrt folgt aus $R_g(X,Y)$ bzw. $G_g(Y) \geq G_g(X)$ für alle Maßstäbe und Maße mit zumindest schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen unmittelbar die Aussage $R_L(X,Y)$!

Ferner besteht eine direkte Äquivalenz zwischen einer höheren Lorenz-Kurve und einem niedrigeren Grad der Disparität, die durch ein beliebiges kardinales lineares Verteilungsmaß mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion gemessen wird.

5. Ausgewählte lineare Verteilungsmaße und Maßstäbe

5.1. Lineare Maße, Maßstäbe und Konzentrationsfläche

Unter der Konzentrationsfläche k_X verstehen wir die Fläche zwischen der Lorenz-Kurve L_X einer beliebigen Verteilung X und der aus der Gleichverteilung der Merkmalssumme $M(X)$ resultierenden Lorenz-Kurve L_{X_g} (1):

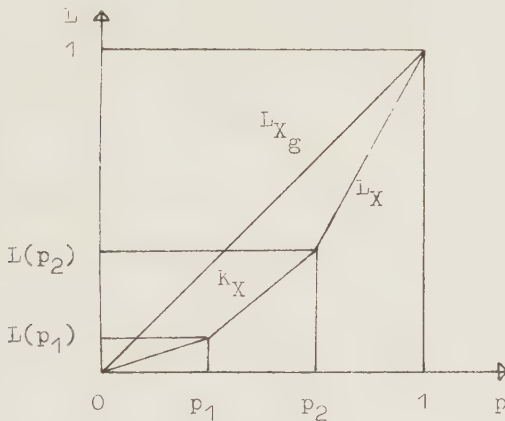


Abb. 1: Konzentrationsfläche.

Wir errechnen die Konzentrationsfläche K_X durch Trapezzerlegungen (2) in Richtung L -Achse mit:

$$\begin{aligned}
 K_X &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}L_X(p_1)\frac{1}{n} - \frac{1}{2}(L_X(p_1)+L_X(p_2))\frac{1}{n} - \dots \\
 &\quad - \frac{1}{2}(L_X(p_{i-1})+L_X(p_i))\frac{1}{n} - \dots - \frac{1}{2}(L_X(p_{n-1})+L_X(p_n))\frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (L_X(p_{i-1}) + L_X(p_i))\frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

- (1) Zum Begriff der Konzentrationsfläche siehe etwa: W. Piesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 28 f.
- (2) Dieses Verfahren verwendet auch Piesch: Vgl. W. Piesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 38

Für die Gleichverteilung X_g ist die Konzentrationsfläche stets Null. Ihren Maximalwert $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$ erreicht sie für die Ungleichverteilung X_u .

Neben der angegebenen Formel für k_X gibt es noch andere Darstellungsmöglichkeiten (1). Wir fügen diesen eine weitere hinzu:

Lemma: Für eine beliebige Verteilung $X \in K_n^+$ läßt sich die Konzentrationsfläche k_X aus der Formel:

$$k_X = \sum_{i=1}^{n-1} (L_{X_g}(p_i) - L_X(p_i)) \frac{1}{n}$$

berechnen.

Beweis: setzen wir $L_{X_g}(p_i) = \frac{i}{n}$, so folgt zunächst:

$$\begin{aligned} k_X &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} L_X(p_i) \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} - \sum_{i=1}^{n-1} L_X(p_i) \frac{1}{n} \end{aligned}$$

erweitern wir mit $\frac{1}{n}$ und berücksichtigen, daß $\sum_{i=1}^n p L_X(p_i) = 1$ ist, so können wir dafür auch schreiben:

$$k_X = \frac{1}{2} \frac{n-1}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (L_X(p_{i-1}) - L_X(p_i)) \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$$

Da nun $(2L_X(p_i) - L_X(p_{i-1}) - L_X(p_i))$ gerade $(L_X(p_{i-1}) + L_X(p_i))$ ist, folgt damit unmittelbar:

$$k_X = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (L_X(p_{i-1}) + L_X(p_i)) \frac{1}{n}$$

was zu beweisen war.

(1) Siehe dazu z.B. Fiesch: Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 38

Vergleichen wir die Konzentrationsfläche K_X in der Form:

$$K_X = \sum_{i=1}^{n-1} (L_X(p_i) - L_X(p_{i+1})) \frac{1}{n}$$

mit einem Maß G_n aus der Klasse der linearen Maße:

$$G_n(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (L_X(p_i) - L_X(p_{i+1})) \cdot \alpha_{i+1,1}$$

so können wir folgern: Jedes lineare Verteilungsmaß kann als spezifisch gewichtete Konzentrationsfläche zwischen der Lorenz-Kurve L_X einer beliebigen Verteilung X und der aus X bei Gleichverteilung der Merkmalssumme $k(X)$ resultierenden Lorenz-Kurve $L_{\bar{X}}$ aufgefasst werden (1).

Entsprechendes gilt für lineare Verteilungsmaßstäbe. Dazu führen wir den Begriff der relativen Konzentrationsfläche K_{XY} ein. Wir definieren K_{XY} als die Fläche zwischen den Lorenz-Kurven L_X und L_Y zweier Verteilungen X und Y . Durch Subtraktion der Konzentrationsfläche K_Y von der Konzentrationsfläche K_X erhalten wir für K_{XY} :

$$K_{XY} = \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \frac{1}{n}$$

Stellen wir diesem Ausdruck einen beliebigen linearen Verteilungsmaßstab R_g entgegen mit:

$$R_g(Y, X) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) Dg(p_{i+1}) \geq 0$$

so folgt: Jeder lineare Verteilungsmaßstab R_g ordnet Verteilungspaare (X, Y) auf Grund spezifisch gewichteter relativer Konzentrationsflächen zwischen den Lorenz-Kurven der jeweiligen Verteilungen.

(1) Einen anderen Nachweis dieses Ergebnisses findet man bei Mehran: Vgl. F. Mehran, Linear Measures of Income Inequality, a.a.O., S. 805 f.

5.2. Die relative Spannweite

Für die schwach monoton wachsende Gewichtsfunktion g mit:

$$g(p_i) = \begin{cases} -1 & \text{für } i = 1 \\ 0 & \text{für } i = 2, \dots, n-1 \\ + & \text{für } i = n \end{cases}$$

erhalten wir mit der relativen Spannweite ein sehr einfach gebautes lineares Verteilungsmaß (1):

$$\begin{aligned} G_g(X) &= L_n(X)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - m(X)) g(p_i) \\ &= L_n(X)^{-1} (x_{(n)} - x_{(1)}) \end{aligned}$$

Die relative Spannweite entspricht damit der Differenz zwischen dem größten und kleinsten Einkommen einer Verteilung X , bezogen auf die absolute Merkmalssumme $m(X)$.

Mit Hilfe der Funktion g können wir ferner einen linearen Verteilungsmaßstab R_g bilden, dessen inverse Ordnungsrelation R_g^{-1} die von der relativen Spannweite G_g induzierte Rangordnung über den geordneten Verteilungspaaren (X, Y) wiedergibt:

$$R_g(Y, X) \iff m(X)^{-1}(x_{(n)} - x_{(1)}) - m(Y)^{-1}(y_{(n)} - y_{(1)}) \geq 0$$

Berücksichtigen wir die Beziehung:

$$m(X)^{-1}(x_{(n)} - x_{(1)}) = 1 - L_X(p_{n-1}) - L_X(p_1)$$

so erhalten wir die äquivalente Formulierung:

$$R_g(Y, X) \iff L_Y(p_{n-1}) - L_X(p_{n-1}) + L_Y(p_1) - L_X(p_1) \geq 0$$

so daß aus $R_g(Y, X)$ wie für alle anderen linearen Maßstäbe stets $R_g(Y, X)$ folgt.

(1) Siehe dazu auch A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 24 f.

5.3. Die relative mittlere Abweichung

Für beliebige Verteilungen in Einzelwerten unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1: Es gebe in der Verteilung X insgesamt r Merkmalswerte ($r \geq 1$), die gerade mit dem Durchschnittseinkommen $m(X)$ der Verteilung X übereinstimmen, d.h.:

$$X^0 = (x_{(1)}, \dots, x_{(k)}, x_{(k+1)}, \dots, x_{(k+r)}, x_{(k+r+1)}, \dots, x_{(n)})$$

$$\text{und: } x_{(k)} < x_{(k+1)} = \dots = x_{(k+r)} = m(X) < x_{(k+r+1)}$$

Unter Benutzung der schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktion g mit:

$$g(p_i) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für } i = 1, 2, \dots, k \\ 0 & \text{für } i = k+1, \dots, k+r, \text{ wobei } r \geq 1 \\ +\frac{1}{2} & \text{für } i = k+r+1, \dots, n \end{cases}$$

erhalten wir die relative mittlere Abweichung, auch "maximum equalization percentage" genannt (1):

$$\begin{aligned} G_g(X) &= M(X)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - m(X)) g(p_i) \\ &= -\frac{1}{2} M(X)^{-1} \sum_{i=1}^k (x_{(i)} - m(X)) + \frac{1}{2} M(X)^{-1} \sum_{i=k+r+1}^n (x_{(i)} - m(X)) \\ &= \frac{1}{2} M(X)^{-1} \sum_{i=1}^n |x_{(i)} - m(X)| \end{aligned}$$

(1) Vgl. Y.Kondor, An Old-New Measure of Income Inequality, Econometrica, Vol. 39, 1971, S. 1041 f.

Gehen wir alternativ von:

$$G_{\mathbb{E}}(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (L_X(p_i) - L_X(p_{i+1})) \mu_{\mathbb{E}}(p_{i+1})$$

aus, so erhalten wir:

$$G_{\mathbb{E}}(X) = \left(\frac{k}{n} - L_X(p_k)\right) \frac{1}{2} + \left(\frac{k+1}{n} - L_X(p_{k+1})\right) \frac{1}{2}$$

aus der Voraussetzung $x_{(k+1)} = \dots = x_{(n)} = m(X)$ folgt:

$$L_X(p_{k+1}) = L_X(p_k) + \frac{1}{n}$$

woraus schließlich:

$$G_{\mathbb{E}}(X) = \frac{k}{n} - L_X(p_k) \text{ bzw. } G_{\mathbb{E}}(X) = L_{X_{\mathbb{E}}}(p_k) - L_X(p_k) \text{ folgt.}$$

Damit entspricht die relative mittlere Abweichung gerade der Länge der größten Lorenz-kurvensehne (1). Die Abweichung zwischen $L_{X_{\mathbb{E}}}$ und L_X ist genau dann maximal, wenn die Lorenz-kurve $L_{X_{\mathbb{E}}}$ parallel zur Lorenz-kurve L_X verläuft bzw. die Zuwächse $\mu_{L_{X_{\mathbb{E}}}}(p_{k+1})$ und $\mu_{L_X}(p_{k+1})$ übereinstimmen. wir erhalten in der Tat:

$$\begin{aligned} \mu_{L_{X_{\mathbb{E}}}}(p_{k+1}) &= L_{X_{\mathbb{E}}}(p_{k+1}) - L_{X_{\mathbb{E}}}(p_k) \\ &= \frac{(k+1)m(X)}{n(X)} - \frac{km(X)}{n(X)} \\ &= \frac{m(X)}{n(X)} = L_X(p_{k+1}) - L_X(p_k) = \mu_{L_X}(p_{k+1}) \end{aligned}$$

woraus unsere Behauptung unmittelbar folgt.

(1) Vgl. v. Piesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 56

Fall 2: Keine Komponente des Verteilungsvektors X sei gleich dem mittleren Einkommen $m(X)$, d.h.:

$$X^0 = (x_{(1)}, \dots, x_{(k)}, x_{(k+1)}, \dots, x_{(n)})$$

$$\text{und: } x_{(k)} < m(X) < x_{(k+1)}$$

Benützen wir diesmal die schwach monoton wachsende Gewichtsfunktion g mit:

$$g(p_i) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für } i = 1, 2, \dots, k \\ +\frac{1}{2} & \text{für } i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

so erhalten wir wiederum aus:

$$G_g(X) = m(X)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - m(X)) g(p_i)$$

die schon bekannte Darstellung:

$$G_g(X) = \frac{1}{2} m(X)^{-1} \sum_{i=1}^n |x_{(i)} - m(X)|$$

Entsprechend folgen aus:

$$G_g(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (L_{X_g}(p_i) - L_X(p_i)) dg(p_{i+1})$$

die beiden Ausdrücke:

$$G_g(X) = \frac{k}{n} - L_X(p_k) \quad \text{bzw.} \quad G_g(X) = L_{X_g}(p_k) - L_X(p_k)$$

Für die extreme Ungleichverteilung X_u ergibt sich daher:

$$G_g(X_u) = \frac{n-1}{n} - 0 = \frac{n-1}{n} \quad (\text{Fall 2 und } k=n-1)$$

so daß die relative mittlere Abweichung als lineares

Verteilungsmaß auf das Intervall $[0, \frac{n-1}{n}]$ normiert ist.

Auch der relativen mittleren Abweichung können wir einen linearen Verteilungsmaßstab zuordnen. Für zwei beliebige Verteilungen X und Y erhalten wir:

$$\kappa_B(Y, X) \Leftrightarrow N(X)^{-1} \sum_{i=1}^n |x_{(i)} - m(X)| - N(Y)^{-1} \sum_{i=1}^n |y_{(i)} - m(Y)| \geq 0$$

oder dazu alternativ:

$$\kappa_L(Y, X) \Leftrightarrow L_{X_B}(p_K) - L_X(p_K) - (L_{Y_B}(p_{K+}) - L_Y(p_{K+})) \geq 0$$

Der lineare Maßstab κ_L vergleicht also die Länge der jeweils größten Lorenz-kurvenseiten miteinander.

Unter der Voraussetzung $k = k^+$ folgt daraus vereinfacht:

$$\kappa_B(Y, X) \Leftrightarrow L_Y(p_K) - L_X(p_K) \geq 0$$

In diesem speziellen Fall wird die Einstufung auf Grund der maximalen Differenz zwischen L_Y und L_X getroffen, die unter der zusätzlichen Voraussetzung $\kappa_L(Y, X)$ stets nicht-negativ ist, d.h. hinreichend für $\kappa_B(Y, X)$ ist stets $\kappa_L(Y, X)$.

stimmen zusätzlich die absoluten Merkmalssummen überein, so erhalten wir:

$$\kappa_B(Y, X) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k (y_{(i)} - x_{(i)}) + \sum_{i=k+1}^n (x_{(i)} - y_{(i)}) \geq 0$$

In dieser Darstellung bilden also Summen spezifischer Merkmalsdifferenzen die Entscheidungsgrundlage. Eine weitere Schreibweise folgt mit:

$$\kappa_B(Y, X) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^k y_{(i)} - \sum_{i=k+1}^n y_{(i)} \geq \sum_{i=1}^k x_{(i)} - \sum_{i=k+1}^n x_{(i)}$$

daraus ergänzend.

5.4. Der Gini-Koeffizient

Für die stark monoton wachsende Gewichtsfunktion (1)

$$g(p_i) = 2p_i - 1$$

erhalten wir mit dem Gini-Koeffizienten eines der bekanntesten statistischen Verteilungsmaße:

Aus: $G_g(X) = M(X)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - m(X))g(p_i)$ folgt

$$G_g(X) = M(X)^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-n}{n}\right)x_{(i)} - M(X)^{-1} \sum_{i=1}^n x_{(i)} \frac{1}{n}$$

$$\text{oder: } G_g(X) = M(X)^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-n-1}{n}\right)x_{(i)}$$

Aus diesem Ausdruck lassen sich zwei bekannte Darstellungen des Gini-Koeffizienten gewinnen: Berücksichtigen wir, daß $M(X)^{-1}x_{(i)}$ mit $DL_X(p_i)$ äquivalent ist, so folgt daraus unmittelbar die von Piesch angegebene Schreibweise (2):

$$G_g(X) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-n-1}{n}\right)DL_X(p_i)$$

Eine weitere bekannte Darstellung folgt mit (3):

$$G_g(X) = -\frac{n+1}{n} + 2 \sum_{i=1}^n iM(X)^{-1}x_{(i)}$$

d.h. der Gini-Koeffizient läßt sich als gewogene Summe relativer Merkmalswerte darstellen, wobei die Gewichte den Rangzahlen der jeweiligen Merkmalswerte entsprechen.

(1) Dies ist eine diskrete Version der von Mehran verwendeten Gewichtsfunktion. Vgl. F.Mehran, Linear Measures of Income Inequality, a.a.O., S. 806

(2) Vgl. W.Piesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 39

(3) Ebd., S. 39

Da die empirische Kovarianz $\text{cov}(\frac{1}{n}, m(X)^{-1} x_{(i)})$ gerade

$$M(X)^{-1} \sum_{i=1}^n i x_{(i)} - \frac{1}{n} \frac{n+1}{2}$$

beträgt, kann man daher den Gini-Koeffizienten auch als doppelte empirische Kovarianz zwischen relativen Rangzahlen $\frac{i}{n}$ und relativen Merkmalsbeträgen $m(X)^{-1} x_{(i)}$ interpretieren (1), d.h.:

$$G_g(X) = 2 \text{cov}(\frac{i}{n}, m(X)^{-1} x_{(i)})$$

Aus der für lineare Maße äquivalenten Darstellung

$$G_g(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (L_X(p_i) - L_X(p_{i+1})) D_g(p_{i+1})$$

folgt unmittelbar:

$$G_g(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (L_X(p_i) - L_X(p_{i+1})) \frac{1}{n}$$

oder $G_g(X) = 2K_X$

d.h. der Gini-Koeffizient läßt sich als doppelte Konzentrationsfläche K_X auffassen (2).

Aus $K_X = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (L_X(p_{i-1}) + L_X(p_i)) \frac{1}{2}$ erhalten wir

schließlich die nachfolgende Schreibweise für den Gini-Koeffizienten (3):

$$G_g(X) = 1 - \sum_{i=1}^n (L_X(p_{i-1}) + L_X(p_i)) \frac{1}{n}$$

(1) Treten in der Verteilung X keine Bindungen auf, so läßt sich der Gini-Koeffizient auch als doppelte empirische Kovarianz zwischen kumulierten relativen Rangzahlen und relativen Merkmalsbeträgen auffassen. Vgl. hierzu: W. Liesch, Statistische Konzentrationsmaße. a.a.O., S. 39

(2) Ebd., S. 39

(3) Siehe hierzu Abschnitt 5.1. dieser Arbeit.

Da die Konzentrationsfläche k_X für die extreme Urverteilung X_u maximal den Wert $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n})$ annimmt (1), ist folglich der Gini-Koeffizient als lineares Verteilungsmaß auf das Intervall $[0, 1 - \frac{1}{n}]$ normiert (2).

Aus der Gewichtsfunktion $2p_i - 1$ können wir aber auch einen linearen Verteilungsmaßstab R_G ableiten, den wir Gini-Maßstab nennen wollen. Wir erhalten für den Gini-Maßstab die folgenden äquivalenten Definitionen:

$$R_G(Y, X) \iff \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-n-1}{n} \right) (DI_X(p_i) - DI_Y(p_i)) \geq 0$$

$$R_G(Y, X) \iff \sum_{i=1}^n ix_{(i)}^{M(X)-1} - \sum_{i=1}^n iy_{(i)}^{M(Y)-1} \geq 0$$

$$R_G(Y, X) \iff \text{cov}\left(\frac{i}{n}, m(X)^{-1} x_{(i)}\right) - \text{cov}\left(\frac{i}{n}, m(Y)^{-1} y_{(i)}\right) \geq 0$$

Dazu halten wir ergänzend fest:

$$R_G(Y, X) \iff \sum_{i=1}^{n-1} (L_Y(p_i) - L_X(p_i)) \geq 0$$

$$R_G(Y, X) \iff K_{XY} \geq 0$$

d.h. der Gini-Verteilungsmaßstab ordnet Verteilungen auf Grund der relativen Konzentrationsfläche k_{XY} zwischen den Lorenz-Kurven der jeweiligen Verteilungen. Auch hier wird sehr schön sichtbar, daß $R_D(Y, X)$ eine hinreichende Bedingung für $R_G(Y, X)$ ist.

(1) Vgl. hierzu Abschnitt 5.1. dieser Arbeit.

(2) einen auf $[0, 1]$ normierten Gini-Koeffizienten erhält man mit $G_G^+(X) = n(n-1)^{-1} G_G(X)$. Zwischen $G_G^+(X)$ und der Konzentrationsfläche besteht dann der Zusammenhang: $G_G^+(X) = \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right]^{-1} K_X$. Siehe dazu etwa: W. Piesch, Statistische Konzentrationsmaße, a.a.O., S. 38

5.5. Der Lorenz-Koeffizient

Definiert man für eine beliebige Verteilung X das Durchschnittseinkommen der unteren k Einkommensbezieher mit:

$$u_k(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_{(i)}$$

und verwendet die schwach monoton wachsende Gewichtsfunktion g_k mit:

$$g_k(i) = \begin{cases} -\frac{n}{k} & \text{für } i = 1, 2, \dots, k \\ 0 & \text{für } i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

so erhält man ein lineares Verteilungsmaß, das als "Lorenz-Koeffizient" L_k bezeichnet werden soll. Aus

$$L_k(X) = E(X)^{-1} \sum_{i=1}^n (x_{(i)} - m(X)) g_k(p_i)$$

erhalten wir die Darstellung:

$$L_k(X) = 1 - m(X)^{-1} m_k^u(X)$$

$L_k(X)$ zeigt an, um wieviel Prozent die absolute Merkmalsausbeute vermindert werden kann, wenn das Durchschnittseinkommen der Gesamtverteilung dem Durchschnittseinkommen $m_k^u(X)$ entsprechen soll. Geht man alternativ von:

$$L_k(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (L_X(p_i) - L_X(p_{i+1})) g_k(p_{i+1})$$

aus, so erhält man:

$$L_k(X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{(i)} - x_{(i+1)}) g_k(p_{i+1})$$

Gilt zusätzlich $x_{(k)} < m(X) < x_{(k+1)}$ für die k -te Komponente des Vektors λ^0 bzw. $x_{(k)} < x_{(k+1)} = \dots = x_{(k+r)} = m(X) < x_{(k+r+1)}$,

so besteht zwischen dem Lorenz-Koeffizienten L_k und der relativen mittleren Abweichung G_g der Zusammenhang:

$$L_k(\lambda) = \frac{n}{k} G_g(X)$$

Durch g_k können wir aber auch einen linearen Maßstab erhalten, den wir mit R_{Lk} bezeichnen:

$$R_{Lk}(Y, X) \iff m(Y)^{-1} m_k^u(Y) - m(X)^{-1} m_k^u(X) \geq 0$$

$$R_{Lk}(Y, X) \iff L_Y(p_k) - L_X(p_k) \geq 0$$

Durch Variation von k im Intervall $[1, n]$ erhalten wir insgesamt n Koeffizienten L_k bzw. lineare Maßstäbe R_{Lk} . Definieren wir die Durchschnittsrelation $R_{\emptyset n}$ der n linearen Maßstäbe R_{Lk} mit:

$$\forall X, Y \in E_n^+ : R_{\emptyset n}(Y, X) \iff \forall k \leq n : R_{Lk}(Y, X)$$

so können wir festhalten:

Satz: Der Lorenz-Maßstab R_L ist mit der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset n}$ äquivalent, d.h.:

$$\forall X, Y \in E_n^+ : R_{\emptyset n}(Y, X) \iff R_L(Y, X)$$

Der Beweis ist evident, da $R_{\emptyset n}(Y, X)$ äquivalent mit:

$$\forall k \leq n : L_Y(p_k) - L_X(p_k) \geq 0$$

und damit gleichbedeutend mit $R_L(Y, X)$ ist. Damit folgt für die n Lorenz-Koeffizienten L_k :

Korollar: Für alle $X, Y \in E_n^+$ sind die Aussagen:

- $R_L(Y, X)$
- $\forall k \leq n : L_k(X) \geq L_k(Y)$

äquivalent.

Diese Eigenschaft legt die Verwendung der Bezeichnung "Lorenz-Koeffizient" nahe.

2.6. Die Maße von Eltetö-Frigyes und lineare Maße

Für die folgende Untersuchung geben wir uns eine beliebige Verteilung X vor mit:

$$X^0 = (x_{(1)}, \dots, x_{(k)}, x_{(k+1)}, \dots, x_{(k+r)}, x_{(k+r+1)}, \dots, x_{(n)})$$

wobei entweder: $x_{(k)} < m(X) < x_{(k+1)}$

oder aber: $x_{(k)} < x_{(k+1)} = \dots = x_{(k+r)} = m(X) < x_{(k+r+1)}$

ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte. In beiden Fällen sind stets k Komponenten kleiner als das mittlere Einkommen $m(X)$, während $n-k$ Komponenten größer oder gleich $m(X)$ sind.

Das Durchschnittseinkommen der Bezieher, deren Einkommen $m(X)$ unterschreitet, errechnet sich mit:

$$m_k^u(X) = \sum_{i=1}^k x_{(i)} \frac{1}{k}$$

wofür wir auch:

$$m_k^u(X) = m(X) L_X(p_k) \frac{n}{k}$$

schreiben können. Entsprechend definieren wir mit $m_{n-k}^o(X)$ das Durchschnittseinkommen der Beziehergruppe, deren Einkommen $x_{(k)}$ übersteigt:

$$m_{n-k}^o(X) = \sum_{i=k+1}^n x_{(i)} \frac{1}{n-k}$$

Auch dieser Ausdruck läßt sich zu:

$$m_{n-k}^o(X) = m(X) (1 - L_X(p_k)) \frac{n}{n-k}$$

umformen. Eltetö und Frigyes entwickeln nun aus $m(X)$,

$m_K^u(X)$ und $m_{n-k}^o(X)$ drei neue Verteilungsmaße, die wir mit $u(X)$, $v(X)$ und $w(X)$ bezeichnen wollen (1):

$$u(X) = \frac{m(X)}{m_K^u(X)}$$

$$w(X) = \frac{m_{n-k}^o(X)}{m(X)}$$

$$v(X) = \frac{m_{n-k}^o(X)}{m_K^u(X)} = u(X)w(X)$$

Alle drei Verteilungsmaße sind einer direkten Interpretation zugänglich (2):

"The measure $v(X)$ may be regarded as a measure of inequality for the entire income distribution, while $u(X)$ and $w(X)$ indicate the inequalities of the two respective parts of the distribution."

Benützen wir die angegebenen Umformungen für $m_K^u(X)$ und $m_{n-k}^o(X)$ und berücksichtigen, daß $\frac{k}{n} = L_{X_g}(p_k)$ gilt, so erhalten wir alternativ:

$$u(X) = \frac{L_{X_g}(p_k)}{L_X(p_k)}$$

$$w(X) = \frac{1 - L_X(p_k)}{1 - L_{X_g}(p_k)}$$

$$v(X) = \frac{(1 - L_X(p_k))L_{X_g}(p_k)}{(1 - L_{X_g}(p_k))L_X(p_k)}$$

d.h. alle drei von Eltetö und Frigyes vorgeschlagenen

-
- (1) Vgl. Ö. Eltetö und E. Frigyes, New Income Inequality Measures as Efficient Tools for Causal Analysis and Planning, *Econometrica*, Vol. 36, S. 384
- (2) Ebd., S. 384, Angleichung an die benutzte Terminologie der Verfasser.

Verteilungsmaße lassen sich als Quotienten aus spezifischen Lorenz-kurvenwerten darstellen.

Wenden wir uns nun der relativen mittleren Abweichung zu, die wir gemäß unseren Ergebnissen in Abschnitt 5.3. mit:

$$G_g(X) = L_{X_g}(p_k) - L_X(p_k)$$

erhalten. Die alternative Bezeichnung "maximum equalization percentage" können wir dadurch rechtfertigen, daß $G_g(X) \cdot 100$ gerade den Prozentsatz der Merkmalssumme $r(X)$ angibt, der von der oberen Gruppe zur unteren Gruppe transferiert werden muß, um die Divergenz in den Durchschnittseinkommen $m_k^d(X)$ bzw. $m_{n-k}^o(X)$ auszugleichen (1). Bei einer Transfer-summe von $r(X)G_g(X)$ erhöht sich nämlich das Durchschnittseinkommen der unteren Gruppe um $\frac{1}{k}r(X)G_g(X)$, während sich das der oberen Gruppe um $\frac{1}{n-k}r(X)G_g(X)$ reduziert, woraus sich insgesamt:

$$m_k^d(X) + \frac{1}{k}r(X)G_g(X) = m_{n-k}^o(X) - \frac{1}{n-k}r(X)G_g(X) = m(X)$$

ergibt, d.h. beide Durchschnittseinkommen entsprechen nun dem mittleren Einkommen der Gesamtverteilung X .

ferner können wir die von Siretö und Frigyes entwickelten Maße als Transformationen der relativen mittleren Abweichung ausdrücken:

$$u(X) = (1 - \frac{n}{k}G_g(X))^{-1}$$

$$w(X) = 1 + \frac{n}{n-k}G_g(X)$$

$$v(X) = \frac{n}{n-k}(1 - \frac{n}{k}G_g(X))^{-1} - \frac{k}{n-k}$$

(1) Vgl. Y. Kondor, An Old-New Measure of Income Inequality, a.a.O., S. 1041 f.

Dieser Zusammenhang wird von Kondor übersehen, wenn er kritisch bemerkt (1):

"No one of these indices is in itself a plausible measure of inequality, since the information it contains is too meagre."

Weiterhin ist es möglich, die relative mittlere Abweichung direkt als eine gemeinsame Funktion von $u(X)$, $v(X)$ und $w(X)$ darzustellen (2):

Satz: Für eine beliebige Verteilung $X \in K_n^+$ läßt sich die relative mittlere Abweichung $G_{\sigma}(X)$ nach der Formel:

$$G_{\sigma}(X) = \frac{(u(X) - 1)(w(X) - 1)}{v(X) - 1}$$

berechnen.

Beweis: Da $w(X)$ durch eine umkehrbare Transformation aus $G_{\sigma}(X)$ hervorgeht, so folgt:

$$G_{\sigma}(X) = \frac{n-k}{n}(w(X) - 1)$$

Für den Quotienten $\frac{u(X) - 1}{v(X) - 1}$ errechnen wir:

$$\frac{u(X) - 1}{v(X) - 1} = \frac{u(X) - 1}{\frac{n}{n-k}u(X) - \frac{k}{n-k} - 1} = \frac{n-k}{n}$$

so daß wir insgesamt:

$$G_{\sigma}(X) = \frac{(u(X) - 1)(w(X) - 1)}{v(X) - 1}$$

erhalten, was zu beweisen war.

(1) Y. Kondor, An Old-New Measure of Income Inequality, a.a.O., S. 1041

(2) Ebd., S. 1041. Siehe dazu auch W. Piesch, Statistische Konzentationsmaße, a.a.O., S. 62

Ähnliche Zusammenhänge gelten auch für den Lorenz-Koeffizienten L_k . Berücksichtigen wir, daß zwischen L_k und der relativen mittleren Abweichung G_g der Zusammenhang:

$$L_k(X) = \frac{n}{k} G_g(X)$$

besteht (1), so erhalten wir zunächst eine weitere Interpretation von L_k : $L_k \cdot 100$ zeigt an, wieviel Prozent des Durchschnittseinkommens $m(X)$ benötigt werden, um $m_k^u(X)$ an $m(X)$ anzugleichen:

$$m_k^u(X) + m(X)L_k(X) = m_k^u + m(X)\frac{n}{k}G_g(X) = m(X)$$

Für die Elvetö-Frigyes habe schließen wir:

$$u(X) = (1 - L_k(X))^{-1}$$

$$w(X) = 1 + \frac{k}{n-k} L_k(X)$$

$$v(X) = \frac{n}{n-k} (1 - L_k(X))^{-1} - \frac{k}{n-k}$$

d.h. $u(X)$, $v(X)$ und $w(X)$ können als Transformationen des Lorenz-Koeffizienten L_k aufgefasst werden. Schließlich ist zu bemerken, daß die Formeln von Elvetö-Frigyes für $k=1$ gelten:

Korollar: Für eine beliebige Verteilung $X \in U_n^+$ läßt sich der Lorenz-Koeffizient $L_k(X)$ nach der Formel:

$$L_k(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{(k)} - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^k}{k}}{n \sum_{i=1}^n x_i - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{2}}$$

berechnen.

Der Beweis des Korollars ist auf Grund des vorangegangenen Satzes evident.

(1) Siehe dazu auch Abschnitt 5.4. dieser Arbeit.

Die Éltető-Frigyes Maße $u(X)$, $v(X)$ und $w(X)$ können alle Werte im Bereich $1, +\infty$ annehmen. Man kann sie jedoch leicht in standardisierte Maße transformieren, deren Wertebereich auf das $0,1$ Intervall beschränkt ist (1):

$$u'(X) = 1 - u(X)^{-1}$$

$$w'(X) = 1 - w(X)^{-1}$$

$$v'(X) = 1 - v(X)^{-1}$$

Auch die standardisierten Éltető-Frigyes Maße sind zwangsläufig Transformationen der relativen mittleren Abweichung $G_E(X)$ und des Lorenz-koeffizienten $L_K(X)$. Wir erhalten zunächst für $u'(X)$:

$$u'(X) = \frac{n}{K} G_E(X) = L_K(X)$$

d.h. das standardisierte Verteilungsmaß $u'(X)$ ist mit dem Lorenz-koeffizienten $L_K(X)$ identisch und unterliegt somit den für L_K gegebenen Interpretationsmöglichkeiten.

Für die Maße $w'(X)$ und $v'(X)$ ergeben sich die Ausdrücke:

$$w'(X) = \frac{n G_E(X)}{n - k + n G_E(X)} = \frac{L_K(X)}{\frac{n}{k} - 1 + L_K(X)}$$

$$v'(X) = \frac{\frac{n}{k} G_E(X)}{1 - \frac{k}{n} + G_E(X)} = \frac{n L_K(X)}{n - k + k L_K(X)}$$

(1) Vgl. É.Éltető und É.Frigyes, New Income Inequality Measures as Efficient Tools for Causal Analysis and Planning, a.a.O., S. 384

Schließlich lassen sich $G_g(X)$ und $L_k(X)$ jeweils als gemeinsame Funktionen der drei standardisierten Maße $u'(X)$, $v'(X)$ und $w'(X)$ darstellen:

Satz: Für eine beliebige Verteilung $X \in K_n^+$ kann man die relative mittlere Abweichung $G_g(X)$ und den Lorenz-koeffizienten $L_k(X)$ durch die Formeln:

$$G_g(X) = \frac{u'(X)w'(X)}{v'(X)}$$

$$L_k(X) = \frac{n}{k} \frac{u'(X)w'(X)}{v'(X)}$$

ausdrücken.

Beweis: Da $u'(X)$ durch eine umkehrbare Transformation aus $G_g(X)$ hervorgeht, so gilt:

$$G_g(X) = \frac{k}{n} u'(X)$$

Für den Quotienten $\frac{w'(X)}{v'(X)}$ ermitteln wir:

$$\frac{w'(X)}{v'(X)} = \frac{nG_g(X)(1 - \frac{k}{n} + G_g(X))}{\frac{n}{k}G_g(X)(n - k + nG_g(X))} = \frac{k}{n}$$

so daß wir insgesamt:

$$G_g(X) = \frac{u'(X)w'(X)}{v'(X)}$$

$$\text{bzw.} \quad L_k(X) = \frac{n}{k} \frac{u'(X)w'(X)}{v'(X)}$$

erhalten, was zu beweisen war.

6. Transfer-Maßstäbe

6.1. Der Pigou-Dalton Transfer-Maßstab

Die Diskussion normativer Meßkonzepte in der ökonomischen Literatur geht auf Dalton's richtungsweisenden Artikel "The Measurement of the Inequalities of Incomes" zurück (1). Er vertritt hierin die These, daß im Mittelpunkt der ökonomischen Forschung nicht in erster Linie die Einkommensverteilung selbst sondern ihre Auswirkungen auf die Verteilung und absolute Höhe der gesamtwirtschaftlichen Wohlfahrt stehen sollte. Dalton schreibt (2):

"First, as to the nature of the problem. An American writer has expressed the view that 'the statistical problem before the economist in determining upon a measure of the inequality in the distribution of wealth is identical with that of the biologist in determining upon a measure of the inequality in the distribution of any physical characteristic'. But this is clearly wrong. For the economist is primarily interested, not in the distribution of income as such, but in the effects of the distribution of income upon the distribution and total amount of economic welfare, which may be derived from income. We have to deal, therefore, not merely with one variable, but with two, or possibly more, between certain functional relations may be presumed to exist.

A partial analogy would be found in the problem of measuring the inequality of rainfall in the various districts of a large agricultural area. From the point of view of the cultivator, what is important is not rainfall as such, but the effects of rainfall upon the crop which may be raised from the land. Between rainfall and crop there will be a certain relation, the discovery of which will be a matter of practical importance. The objection to great inequality of rainfall is the resulting loss of potential crop. The objection to great inequality of incomes is the resulting loss of potential economic welfare."

(1) H. Dalton, The Measurement of the Inequality of Incomes, The Economic Journal, Vol. 30, S. 348 ff.

(2) Ebd., S. 348 f.

Siebenundvierzig Jahre später nehmen Aigner und Meins diesen Gedanken wieder auf (1):

"When economists make judgments about equality in a distribution of income or between income distribution alternatives, those judgments are usually couched in terms of the *ceteris paribus* preference for a more equal distribution. Adherence to this rule of selection must necessarily imply the use of additional assumptions concerning the social welfare attached to income and its distribution, either through a social welfare function specified by the observer or by a simple consensus of thought as to the preference of greater income equality."

Als eine erste Operationalisierung der von Dalton wie auch von Aigner und Meins angestellten Überlegungen werden wir zunächst - ohne hierbei schon explizit eine direkte funktionale Beziehung zwischen Einkommen und Wohlfahrt unterstellen zu wollen - eine Reihe von unvollständigen symmetrischen normativen Verteilungsmaßstäben konstruieren, die wir als soziale Präferenzrelationen auffassen. Dabei ziehen wir in der Tradition Pigou's als Motivation für soziale Präferenz positive Einkommenstransfers von reich zu arm heran (2): Wir präferieren eine Verteilung Y gegenüber einer Verteilung X genau dann, wenn Y durch Einkommensverschiebungen von Reichen zu Armen aus X gewonnen werden kann. Die spezielle Ausgestaltung dieser Transfers dient uns hierbei als Konstruktions- und Abgrenzungskriterium für unsere Verteilungsmaßstäbe. Dazu eine erste Begriffsbildung:

Def.: Gegeben sei eine beliebige ungeordnete Verteilung $X \in R_n^+$. Die Verteilung Y geht genau dann aus X durch einen Pigou-Dalton Transfer hervor, wofür wir $Y = t_P^1(X)$

(1) D.J.Aigner und A.J.Meins, A Social Welfare View of the Measurement of Income Equality, The Review of Income and Wealth, Vol. 13, 1967, S.12

(2) Vgl. A.C.Pigou, Wealth and Welfare, Macmillan and Co., London usw., 1912, S. 24, und:

A.C.Pigou, The Economics of Welfare, 3rd. Ed., Macmillan and Co., London usw., 1929, S. 91

schreiben, wenn ein positiver Einkommenstransfer t vom Bezieher auf Rang k zum Bezieher auf Rang $k-h$ vorgenommen wird, wobei t maximal die Hälfte der Einkommensdifferenz $x_{(k)} - x_{(k-h)}$ betragen darf (1):

$$i = t_P^1(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \Pi \text{ und } \exists t \in [0, \frac{1}{2}(x_{(k)} - x_{(k-h)})] \text{ so daß:} \\ Y^0 \Pi = (x_{(1)}, \dots, x_{(k-h)} + t, \dots, x_{(k)} - t, \dots, x_{(n)}) \end{cases}$$

Ein Pigou-Dalton Transfer ist damit lediglich rangerhaltend bezüglich der in der Transfer involvierten Bezieher, d.h. die Verteilung $Y^0 \Pi$ ist im allgemeinen ungeordnet.

Unter Verwendung der Verteilung X^0 mit:

$$x'_{(i)} = x_{(i)} \text{ für } i \neq k-h, k; \quad x'_{(k-h)} = x'_{(k)} = \frac{1}{2}(x_{(k-h)} + x_{(k)})$$

können wir die folgende äquivalente Definition einführen:

Def.: Es gilt genau dann $Y = t_P^1(X)$, wenn eine Permutationsmatrix Π existiert, so daß für alle $\beta \in [0, 1]$ die Verteilung $Y^0 \Pi$ als gewogener Durchschnitt der beiden Verteilungen X^0 und X^0 darstellbar ist:

$$Y = t_P^1(X) \Leftrightarrow \exists \Pi: Y^0 \Pi = \beta X^0 + (1-\beta) X^0$$

Den Weg zu einem Verteilungsmaßstab weist uns Dalton selbst (2):

"It is possible that, in comparing two distributions, in which both the total income and the number of income-receivers are the same, we may see that one might be able to be evolved from the other by means of a series of transfer of this kind."

- (1) Dalton selbst begrenzt die maximal zulässige Transfersumme auf die gesamte Einkommensdifferenz. Da wir jedoch ausschließlich symmetrische Maßstäbe konstruieren, können wir Transferbeträge aus dem Intervall $[\frac{1}{2}(x_{(k)} - x_{(k-h)}), (x_{(k)} - x_{(k-h)})]$ unberücksichtigt lassen. Vgl. H. Dalton, The Measurement of the Inequality of Incomes, a.a.O., S. 351

- (2) Ebd. S. 351 f.

Dieser Gedankengang legt die folgende Definition nahe:

Def.: Die Pigou-Dalton Transfer-Relation R_{PDT} ist ein normativer Verteilungsmaßstab, der nach der Vorschrift:

$$\forall X, Y \in R_n^+: R_{PDT}(Y, X) \leftrightarrow Y = t_P^r(X), r \geq 1$$

gebildet wird.

Die Aussage $R_{PDT}(Y, X)$ ist also genau dann wahr, wenn die Verteilung Y aus X durch eine endliche Folge einzelner Pigou-Dalton Transfers hervorgeht. Dabei gibt der Index r die Zahl der benötigten Transfers an, wobei

$$t_P^{r+q}(X) = t_P^r(t_P^q(X)), r, q \geq 1$$

gelte. Damit können wir die Transitivität von R_{PDT} nachweisen: Zunächst folgt aus " $R_{PDT}(X, Y)$ und $R_{PDT}(Y, Z)$ ":

$$X = t_P^r(Y) \text{ und } Y = t_P^q(Z)$$

woraus wir unmittelbar $X = t_P^r(t_P^q(Z))$ bzw. $X = t_P^{r+q}(Z)$ erhalten, was $R_{PDT}(X, Z)$ impliziert.

Ferner ist R_{PDT} reflexiv:

$$\forall X \in R_n^+: R_{PDT}(X, X), \text{ da } X = t_1^0(X) \text{ mit } II = 1 \text{ und } t = 0$$

Die Pigou-Dalton Transfer-Relation weist somit alle Eigenschaften eines Verteilungsmaßstabes auf. Allerdings lassen sich mit ihr nur diejenigen Verteilungen miteinander vergleichen, die durch eine endliche Zahl von Pigou-Dalton Transfers ineinander übergeführt werden können, d.h. die Pigou-Dalton Relation ist unvollständig.

Schließlich ist R_{PDT} symmetrisch:(1):

$$\forall X \in R_n^+: R_{PDT}(X, XII) \text{ für alle Permutationsmatrizen } XII$$

Der Beweis ist evident, da $XIIII(XII) = X^0$.

(1) Die Pigou-Dalton Äquivalenzrelation I_{PDT} ist definiert mit: $\forall X, Y \in R_n^+: I_{PDT}(X, Y) \leftrightarrow R_{PDT}(X, Y)$ und $R_{PDT}(Y, X)$.

6.2. Der rangerhaltende Transfer-Maßstab

Der Begriff eines rangerhaltenden Einkommenstransfers (rank-preserving equalization) wurde zuerst von G.J. Fields und J.O.H. Fei in die Literatur eingeführt (1). Wir können ihn als Spezialfall eines Pigou-Dalton Transfers auffassen:

Def.: Gegeben sei eine beliebige ungeordnete Verteilung $X \in \mathbb{R}_n^+$. Die Verteilung Y geht genau dann aus X durch einen rangerhaltenden Transfer hervor, wofür wir:

$$Y = t_R^1(X)$$

schreiben, wenn ein positiver Einkommenstransfer t vom Bezieher auf Rang (k) zum Bezieher auf Rang $(k-h)$ durchgeführt wird, der jedoch rangerhaltend bezüglich aller n Einkommensbezieher sein muß, d.h.:

$$Y = t_R^1(X) \iff Y^0 = (x_{(1)}, \dots, x_{(k-h)} + t, \dots, x_{(k)} - t, \dots, x_{(n)})$$

$$\text{mit: } t \leq \frac{1}{2}(x_{(k)} - x_{(k-h)}) \text{ falls } h = 1$$

$$t \leq \min\{x_{(k-h+1)} - x_{(k-h)}, x_{(k)} - x_{(k-1)}\}$$

$$\text{falls } 1 < h \leq k-1$$

Für $h = 1$ sind Pigou-Dalton Transfers mit rangerhaltenden Transfers offensichtlich äquivalent. Für alle übrigen h ist jeder rangerhaltende Transfer auch ein Pigou-Dalton Transfer, die Umkehrung ist jedoch nicht richtig.

(1) Vgl. G.J. Fields und J.O.H. Fei, On Inequality Comparisons, *Econometrica*, Vol. 46, 1978, S. 306

Def.: Die rangerhaltende Transfer-Relation R_{RT} ist ein normativer Verteilungsmaßstab, der nach der Vorschrift:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : R_{RT}(Y, X) \iff Y = t_R^r(X), r \geq 1$$

gebildet wird.

Die Aussage $R_{RT}(Y, X)$ ist also genau dann wahr, wenn die Verteilung Y durch eine endliche Folge einzelner rangerhaltender Transfers aus der Verteilung X erhältlich ist. Der Index r gibt die Anzahl der benötigten Transfers an, wobei wir wieder die Rechenregel:

$$t_R^{r+q}(X) = t_R^r(t_R^q(X))$$

eingeführen. Auch R_{RT} ist reflexiv, transitiv und symmetrisch:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : R_{RT}(X, X), \text{ da } X = t_R^1(X) \text{ mit } t = 0$$

$$\forall X, Y, Z \in \mathbb{R}_n^+ : R_{RT}(X, Y) \text{ und } R_{RT}(Y, Z)$$

$$\implies X = t_R^r(Y) \text{ und } Y = t_R^q(Z)$$

$$\implies X = t_R^r(t_R^q(Z)) \text{ bzw. } X = t_R^{r+q}(Z)$$

$$\implies R_{RT}(X, Z)$$

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : I_{RT}(X, XII) \text{ für alle Permutationsmatrizen } II(1),$$

$$\text{da } XIIII(XII) = X^0$$

Ferner ist R_{RT} unvollständig, da mit ihr nur diejenigen geordneten Paare (X, Y) verglichen werden können, die durch eine endliche Zahl rangerhaltender Transfers auseinander hervorgehen.

(1) Die rangerhaltende Äquivalenzrelation I_{RT} ist definiert mit: $\forall X, \lambda \in \mathbb{R}_n^+ : I_{RT}(X, \lambda) \iff R_{RT}(X, \lambda) \text{ und } R_{RT}(\lambda, X)$.

6.3. Der simultane Transfer-Maßstab

Ausgangspunkt für den simultanen Transfer-Maßstab ist die Überlegung, daß eine beliebige Ausgangsverteilung X durch geeignete Transfers zwischen den Bezieheren in jede andere gewünschte Verteilung Y überführt werden kann unter der Voraussetzung, daß beide Verteilungen die gleiche absolute Merkmalssumme besitzen. Definieren wir den "Nettotransfervektor" D mit:

$$\begin{aligned} D &= (d_{(1)}, \dots, d_{(n)}) \\ &= Y^0 - X^0 \\ &= (y_{(1)} - x_{(1)}, \dots, y_{(n)} - x_{(n)}) \end{aligned}$$

so gibt D die relative Verbesserung, bzw. Verschlechterung der einzelnen Bezieher nach Durchführung der Transfers gegenüber der Ausgangsverteilung X an: Ist $d_{(i)}$, die i -te Komponente des Nettotransfervektors positiv, so hat der Bezieher auf Rang (i) offensichtlich "dazugewonnen", ist $d_{(i)}$ negativ, so hat er insgesamt "verloren". Selbstverständlich kann $d_{(i)}$ auch Null sein: In diesem Fall wurde der Bezieher in Transfers nicht einbezogen bzw. er erhielt einen positiven Einkommenstransfer, leistete aber auch in gleicher Höhe einen Transfer an einen anderen Bezieher. Da die Verteilungen X und Y die gleiche absolute Merkmalssumme aufweisen, gilt für die Summe der Komponenten $d_{(i)}$ des Nettotransfervektors D insgesamt:

$$\sum_{i=1}^n d_{(i)} = \sum_{i=1}^n (y_{(i)} - x_{(i)}) = M(Y) - M(X) = 0$$

d.h. die einzelnen Komponenten addieren sich gerade zu Null auf.

Aus dem Nettotransfervektor O kann man zunächst nicht schließen, nach welcher Regel die Transfers geleistet werden. Diesen Freiheitsgrad schließen wir durch die Vorschrift:

$$x^0 - x^0 = (t_{(1)}, t_{(2)} - t_{(1)}, \dots, t_{(n-1)} - t_{(n-2)}, -t_{(n-1)})$$

d.h. wir überführen die Verteilung X in die Verteilung Y durch maximal $n-1$ simultan stattfindende positive wie auch negative Transfers $t_{(i)}$, wobei diese jeweils zwischen zwei regelmäßig benachbarten Einkommensbeziehern stattfinden.

Fassen wir die $n-1$ simultanen Transfers $t_{(i)}$ im Bruttotransfervektor T mit:

$$T = (t_{(1)}, t_{(1)}, \dots, t_{(n-1)}, t_{(n-1)}, 0)$$

zusammen und definieren zusätzlich die $n \times n$ Matrix V mit:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

so können wir T bei vorgegebenen Verteilungen X und Y berechnen als:

$$T = (Y^0 - X^0)V^{-1} = -\Delta^0 V^{-1}$$

Selbstverständlich können die einzelnen Komponenten des Bruttotransfervektors T sowohl positive wie auch negative Werte annehmen. Davon ausgenommen ist die letzte Komponente, die definitionsgemäß stets Null betragen muß.

Diese Eigenschaft des Bruttotransfervektors T gibt nun Anlaß für die Definition:

Def.: Die simultane Transfer-Relation R_{ST} ist ein normativer Verteilungsmaßstab, der nach der Vorschrift:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: R_{ST}(Y, X) \iff (Y^0 - X^0)V^{-1} = T \geq \vec{0}$$

gebildet wird.

Die Aussage $R_{ST}(Y, X)$ ist also genau dann wahr, wenn der Bruttotransfervektor T bezüglich der Verteilungen Y und X keine negativen Komponenten aufweist.

In diesem Fall leistet ein Bezieher auf Rang i gerade einen nichtnegativen Transfer $t_{(i-1)}$ an den Bezieher auf Rang $i-1$ und empfängt einen nichtnegativen Transfer $t_{(i)}$ vom Bezieher auf Rang $i+1$, vorausgesetzt, es handelt sich nicht um die Bezieher auf Rang 1 und n . Ausgeschlossen ist also, daß er an beide Bezieher auf den Rängen $i-1$ bzw. $i+1$ Transfers leisten muß oder umgekehrt von beiden Transfers erhält. Weiterhin empfängt der Bezieher auf Rang 1 stets einen nichtnegativen Transfer $t_{(1)}$, während der Bezieher auf Rang n einen nichtnegativen Transfer $t_{(n-1)}$ an den Bezieher auf Rang $n-1$ leisten muß (1). Wir schließen damit aus, daß der "Ärmste" "verliert" und der "Reichste" "gewinnt". Weiterhin bleibt festzuhalten, daß die Rangordnung bezüglich aller n Einkommensempfänger erhalten bleibt. Dies gilt freilich auch im Fall eines negativen Bruttotransfervektors, da wir nach der angegebenen Transfervorschrift stets $Y^0 = X^0 + TV$ erhalten.

(1) Die Verwendung der Bezeichnung "nichtnegative Transfers" schließt Nullsummen-Transfers mit ein.

Auch der simultane Transfer-Maßstab R_{ST} erfüllt alle Eigenschaften einer Quasiordnung:

Zunächst ist R_{ST} reflexiv:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : R_{ST}(X, X), \text{ da } (X^0 - X^0)V^{-1} = \vec{0}$$

Ferner ist R_{ST} transitiv:

$$\begin{aligned} \forall X, Y, Z \in \mathbb{R}_n^+ : & R_{ST}(X, Y) \text{ und } R_{ST}(Y, Z) \\ \Rightarrow & (X^0 - Y^0)V^{-1} \geq \vec{0} \text{ und } (Y^0 - Z^0)V^{-1} \geq \vec{0} \\ \Rightarrow & (X^0 - Y^0)V^{-1} + (Y^0 - Z^0)V^{-1} \geq \vec{0} \\ \Rightarrow & (X^0 - Z^0)V^{-1} \geq \vec{0} \\ \Rightarrow & R_{ST}(X, Z) \end{aligned}$$

R_{ST} ist jedoch keine vollständige Ordnungsrelation:
Unvergleichbar sind alle geordneten Verteilungspaare,
deren Bruttotransfervektor Komponenten mit wechselnden
Vorzeichen aufweist.

Schließlich ist R_{ST} symmetrisch, d.h. (1):

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : I_{ST}(X, XII) \text{ für alle Permutationsmatrizen } \Pi.$$

Der Beweis ist evident, da $XIIII(XII) = X^0$

(1) Die simultane Äquivalenzrelation I_{ST} ist definiert
mit: $\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : I_{ST}(X, Y) \Leftrightarrow R_{ST}(X, Y) \text{ und } R_{ST}(Y, X).$

6.4. Transfer-Maßstäbe und der Lorenz-Maßstab

Aus der Grundidee, positive Einkommenstransfers von reich zu arm als Motivation für soziale Präferenz heranzuziehen, konstruierten wir je nach der spezifischen Ausgestaltung der Transfers unterschiedliche normative Verteilungsmaßstäbe. Daran anknüpfend stellen sich die beiden Fragen:

- Ergeben sich aus dieser Vielfalt konfligierende Wertungen oder ist das von den drei Transfer-Maßstäben gezeichnete Bild einheitlich?
- Können wir mit dem positiven Lorenz-Maßstab die wesentlichsten Charakteristika der drei Transfer-Maßstäbe erfassen?

Die Antworten darauf gibt uns der folgende Satz:

Satz: Für alle Verteilungen $X, Y \in \mathbb{R}_n^+$ mit $M(X) = M(Y)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) $R_{PDT}(X, Y)$, d.h. X kann durch eine endliche Zahl von Pigou-Dalton Transfers aus Y überführt werden.
- b) $R_{RT}(X, Y)$, d.h. X kann durch eine endliche Zahl von rangerhaltenden Einkommenstransfers aus Y gewonnen werden.(1).
- c) $R_{ST}(X, Y)$, d.h. der Bruttotransfervektor T besitzt ausschließlich nichtnegative Komponenten.
- d) $R_L(X, Y)$, d.h. die Lorenz-Kurve L_X ist identisch mit der Lorenz-Kurve L_Y oder aber L_X liegt teilweise oder ganz überhalb von L_Y .

(1) Die Äquivalenz der Aussagen b) und d) findet sich auch in Theorem 2.1. bei: G.S.Fields und J.C.H.Fei, On Inequality Comparisons, a.a.O., S. 309

Beweis: Wir beweisen die Äquivalenz der Aussagen a) - d), indem wir die Richtigkeit folgender Implikationen zeigen:

$$R_L(X,Y) \rightarrow R_{KP}(X,Y) \rightarrow R_{JTP}(X,Y) \Rightarrow R_{ST}(X,Y) \Rightarrow R_L(X,Y)$$

Die einzelnen Aussagen durchlaufen also eine zyklische Anordnung.

$$R_L(X,Y) \rightarrow R_{KP}(X,Y)(1):$$

Wir berechnen zunächst den in Abschnitt 6.3. eingeführten Kettentransfervektor D für die beiden Verteilungen X und Y:

$$\begin{aligned} D &= (x(1)-y(1), x(2)-y(2), \dots, x(n)-y(n)) \\ &= (d(1), d(2), \dots, d(n)) \end{aligned}$$

anschließend teilen wir den Vektor D in r Subvektoren D_j auf:

$$D = (D_1, D_2, \dots, D_j, \dots, D_r)$$

wobei wir die folgenden fünf Kriterien zugrunde legen:

- 1) Jedes $d(i)$ ist Komponente eines Subvektors D_j .
- 2) Jeder Subvektor D_j besitzt mindestens ein von Null verschiedenes $d(i)$.
- 3) Ist $d(i)$ Komponente des Subvektors D_j und $d(m)$ Komponente des Subvektors D_q , so impliziert $j < q$, daß $i < m$ gilt.
- 4) Die jeweils erste Komponente der Subvektoren $D_2, D_3, \dots, D_r$ ist von Null verschieden.
- 5) Die Subvektoren D_j wechseln im Vorzeichen, d.h. enthält D nur positive Komponenten, so enthält D_{j+1} nur negative.

-
- (1) Wir verwenden dazu eine modifizierte Version des Beweises von G.S.Fields und J.C.H.Fei: On Inequality Comparisons, a.a.O., S. 310 ff.

Die nach diesen Kriterien vorgenommene Aufteilung des Nettotransfervektors D ist stets eindeutig. Wir haben dabei Bezieher, die eine "Verbesserung" gegenüber der Ausgangsverteilung Y erfahren haben, positiven Subvektoren zugeordnet. Entsprechend befinden sich die "Verlierer" in negativen Subvektoren. Mit Ausnahme des trivialen Falles $Y = X$ gibt es mindestens zwei Subvektoren D_j , d.h. im allgemeinen ist $r = 2$.

Die Summe der Komponenten $d_{(i)}$, die jeweils in einem Subvektor D_j enthalten sind, bezeichnen wir mit S_j :

$$S_j = \sum_{d \in D_j} d_{(i)} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, r$$

Aus den Abgrenzungskriterien 1) - 5) resultieren für die Komponentensummen S_j folgende Eigenschaften:

- Alle S_j sind strikt positiv bzw. negativ, d.h. $S_j \neq 0$ für $j = 1, 2, \dots, r$. Dies folgt unmittelbar aus Kriterium 2).
- Kriterium 5) impliziert, daß die Komponentensummen im Vorzeichen wechseln.
- Da wir lediglich Verteilungen mit gleichen absoluten Merkmalssummen betrachten, woraus:

$$\sum_{i=1}^n d_{(i)} = 0$$

folgt (1), so erhalten wir für die Summe aus r Komponentensummen:

$$\sum_{j=1}^r S_j = \sum_{i=1}^n d_{(i)} = 0$$

(1) Vgl. dazu Abschnitt 6.3. dieser Arbeit.

Nach diesen Vorarbeiten stellen wir zunächst fest:

Behauptung: Aus $R_L(X,Y)$ folgt $D = (D_1^+, D_2^-, D_3^+, D_4^-, \dots, D_{r-1}^+, D_r^-)$,
wobei (+) bzw. (-) auf die Vorzeichen der jeweiligen Subvektoren hinweisen.

Aus der Voraussetzung $R_L(X,Y)$ ergibt sich:

$$M(X)^{-1} \sum_{j=1}^i x_{(j)} - M(Y)^{-1} \sum_{j=1}^i y_{(j)} \geq 0$$

für alle $i = 1, 2, \dots, n$

Da die Verteilungen X und Y die gleichen absoluten Merkmalssummen haben, können wir dafür vereinfacht schreiben:

$$\sum_{j=1}^i (x_{(j)} - y_{(j)}) \geq 0$$

oder aber $\sum_{j=1}^i d_{(j)} \geq 0$ für alle $i = 1, 2, \dots, n$,

woraus $\sum_{j=1}^l S_j \geq 0$ für alle $l = 1, 2, \dots, r$ folgt.

Dieses Ergebnis impliziert nun zusammen mit den beiden

Komponentensummen-Eigenschaften $S_j \neq 0$ und $\sum_{j=1}^r S_j = 0$,

die Vorzeichen D_1^+ und D_r^- , da andernfalls $S_1 < 0$ bzw.

$\sum_{j=1}^r S_j > 0$ und damit ein Widerspruch folgen würde.

Unter Berücksichtigung der jeweils alternierenden

Vorzeichen der Subvektoren erhalten wir daraus unmittelbar

unsere Behauptung $D = (D_1^+, D_2^-, D_3^+, D_4^-, \dots, D_{r-1}^+, D_r^-)$.

Alle Bezieher im untersten Subvektor D_1 sind unter der Voraussetzung $R_L(X,Y)$ also stets "Gewinner". Entsprechend befinden sich im obersten Subvektor D_r stets "Verlierer". Darüber hinaus ist r eine gerade Zahl.

Im Anschluß daran verifizieren wir den folgenden Sachverhalt:

Behauptung: Wenn $R_L(X, Y)$, so existiert eine Verteilung Y' mit den nachfolgenden Eigenschaften:

- 1) Y' kann durch einen einzelnen rangerhaltenen Transfer aus Y gewonnen werden, d.h. es gilt $Y' = t_R^1(Y)$.
- 2) Aus $d_{(i)}=0$ folgt $d'_{(i)}=0$ mit $d'_{(i)}=x_{(i)}-y'_{(i)}$.
- 3) Es existiert ein j mit $d_{(j)} \neq 0$ und $d'_{(j)}=0$.
- 4) Die Aussage $R_L(X, Y')$ ist wahr.

Zum Beweis nehmen wir an, daß $d_{(m)}$ die letzte von Null verschiedene positive Komponente des Subvektors D_{r-1}^+ und $d_{(q)}$ die erste negative Komponente des Subvektors D_r^- ist. Im allgemeinen gilt $q \neq m+1$, d.h. der Subvektor D_{r-1}^+ hat über $d_{(m)}$ hinaus weitere Komponenten, die freilich alle gleich Null sind: $d_{(m+1)}=d_{(m+2)}= \dots =d_{(q-1)} = 0$

Wir führen nun einen positiven Einkommenstransfer t vom Bezieher auf Rang q zum Bezieher auf Rang m durch mit

$$t = \min\{d_{(m)}, -d_{(q)}\} = \min\{(x_{(m)}-y_{(m)}), (y_{(q)}-x_{(q)})\}$$

Die daraus resultierende Verteilung nennen wir Y' .

Wir zeigen zunächst, daß der angegebene Transfer t rang-erhaltend ist. Dazu unterscheiden wir:

Fall 1: $\min\{d_{(m)}, -d_{(q)}\} = d_{(q)}$. Dann folgt die Abschätzung:

$$y_{(m)}+d_{(m)} \leq x_{(m+1)} \leq \dots \leq x_{(q-1)} < y_{(q)}-d_{(m)}$$

weil $x_{(q-1)} \leq y_{(q)}-d_{(q)} < y_{(q)}-d_{(m)}$ laut Voraussetzung gilt.

Fall 2: $\min\{d_{(m)}, -d_{(q)}\} = -d_{(q)}$. Dann folgt:

$$y_{(m)+(-d_{(q)})} < x_{(m+1)} \leq \dots \leq x_{(q-1)} = y_{(q)-(-d_{(q)})}$$

weil $y_{(m)+(-d_{(q)})} < y_{(m)+d_{(m)}} \leq x_{(m+1)}$ nach Voraus-

setzung richtig ist. In beiden untersuchten Fällen ist t also rangerhaltend, woraus $Y' = t_R^1(Y)$ folgt.

Im Fall 1) ist ferner $d_{(m)} \neq 0$ und $d'_{(m)} = 0$. Analog gilt im Fall 2) $d_{(q)} \neq 0$ und $d'_{(q)} = 0$. Für alle anderen Komponenten mit $d_{(i)} = 0$ ist auch $d'_{(i)} = 0$. Damit genügt die Verteilung Y' auch den Eigenschaften 2) und 3).

Zum Nachweis von $R_L(X, Y')$ errechnen wir zunächst die Lorenz-Kurve $L_{Y'}$ der Verteilung Y' mit:

$$L_{Y'}(p_i) = L_Y(p_i) \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, m-1; i = q, q+1, \dots, n$$

$$L_{Y'}(p_i) = L_Y(p_i) + M(Y)^{-1}t \quad \text{für } i = m, m+1, \dots, q-1$$

Daraus folgt für die Lorenz-Kurven-Differenzen $L_X - L_{Y'}:$

$$L_X(p_i) - L_{Y'}(p_i) = L_X(p_i) - L_Y(p_i) \geq 0$$

$$\text{für } i = 1, 2, \dots, m-1; i = q, q+1, \dots, n$$

Dies folgt unmittelbar aus der Voraussetzung $R_L(X, Y)$.

Nun müssen wir nur noch die Richtigkeit von:

$$L_X(p_i) - L_{Y'}(p_i) \geq 0 \quad \text{für } i = m, m+1, \dots, q-1$$

nachweisen. Die $q - m$ Ungleichungen sind erfüllt, falls

$$L_X(p_i) - L_Y(p_i) \geq M(Y)^{-1}t \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=1}^i d_{(j)} \geq t \quad \text{für}$$

$i = m, m+1, \dots, q-1$ zutreffend ist.

Nun resultiert aus $R_L(X, Y)$ zunächst: $\sum_{j=1}^{m-1} d(j) \geq 0$

Ferner impliziert $t = \min\{d(m), -d(q)\} : d(m) \geq t$

Addieren wir beide Gleichungen und berücksichtigen, daß nach Voraussetzung $\sum_{j=m+1}^{q-1} d(j) = 0$ gilt, so folgt mit:

$$\sum_{j=1}^i d(j) \geq t \quad \text{für } i = m, m+1, \dots, q-1$$

unser gesuchtes Ergebnis. Alle Lorenz-Kurven-Differenzen $L_X - L_Y$, sind damit nichtnegativ, so daß gemäß unserer Behauptung $R_L(X, Y')$ richtig ist.

Nun übertragen wir alle Überlegungen, die wir bezüglich der Verteilungen X und Y angestellt haben, analog auf das Verteilungspaar X, Y' :

Wir definieren dazu den Nettotransfervektor D' mit

$$D' = (d'_1, \dots, d'_n) = (x_{(q)} - y'_{(1)}, \dots, x_{(n)} - y'_{(n)})$$

und teilen ihn wieder in r Subvektoren D'_j ein. Gemäß unserer Behauptung existiert dann wieder eine Verteilung Y'' , die wir durch einen positiven rangerhaltenden Transfer vom q' -ten Bezieher zum Bezieher auf Rang m' erhalten, wobei $d'_{(m')}$ die letzte von Null verschiedene positive Komponente des Subvektors D'_{r-1} und $d'_{(q')}$ die erste negative Komponente des Subvektors D'_r darstellt. Dabei haben wir wieder mindestens ein $d_{(i)} \neq 0$ eliminiert. Da es bei n Einkommensbeziehern stets nur endlich viele $d_{(i)} \neq 0$ gibt, erreichen wir somit nach endlich vielen, nämlich maximal $n-1$ Transfers die Verteilung X , d.h. es gilt $X = t_R^T(Y)$ mit $r \leq n-1$ und damit $R_{RT}(X, Y)$, was zu beweisen war.

$$R_{RT}(X, Y) \Rightarrow R_{PDT}(X, Y):$$

Diese Implikation ist evident, da jeder rangerhaltende Transfer als Pigou-Dalton Transfer interpretierbar ist (1).

$$R_{PDT}(X, Y) \Rightarrow R_{ST}(X, Y):$$

Da die Relationen R_{PDT} und R_{ST} transitiv sind, genügt es zu zeigen, daß die durch einen einzelnen Pigou-Dalton Transfer vom Bezieher auf Rang k zum Bezieher auf Rang $k-h$ gewonnene Verteilung $\tilde{Y}$ bezüglich der Ausgangsverteilung Y einen nichtnegativen Bruttotransfervektor T aufweist, d.h. wir beweisen:

$$T = ((\tilde{Y}^0 \Pi)^0 - Y^0) V^{-1} \geq \vec{0}$$

$$\text{mit } \tilde{Y}^0 \Pi = (y_{(1)}, \dots, y_{(k-h)} + t, \dots, y_{(k)} - t, \dots, y_{(n)})$$

$$\text{und } t \in [0, \frac{1}{2}(y_{(k)} - y_{(k-h)})]$$

Dazu müssen wir zunächst konkrete Annahmen über die Verteilung $(\tilde{Y}^0 \Pi)^0$ treffen: Durch den Pigou-Dalton Transfer rücke der Bezieher von Rang $k-h$ auf den Rang $k-h+r$ mit $r \geq 0$ vor. Gleichzeitig nehme der Bezieher auf Rang k nun die Position $k-s$ ein. Da sich durch einen Pigou-Dalton Transfer die relativen Positionen der Empfänger nicht vertauschen dürfen, so erhalten wir bei vorgegebenem h für die Parameter r und s die Restriktion:

$$k - s \geq k - h + r + 1$$

$$\text{oder } s \leq h - r - 1$$

Unter Benützung dieser Annahmen können wir nun für die

(1) Vgl. dazu Abschnitt 6.2. dieser Arbeit.

Komponenten $d_{(i)}$ des Nettotransfervektors D mit

$\bar{D} = (\tilde{Y}^0 \Pi)^0 - Y^0$ schließen:

Für $i = 1, \dots, k-h-1$: $d_{(i)} = 0$

Für $i = k-h, \dots, k-h+r$: $d_{(i)} \geq 0$

Für $i = k-h+r+1, \dots, k-s-1$: $d_{(i)} = 0$

Für $i = k-s, \dots, k$: $d_{(i)} \leq 0$

Für $i = k+1, \dots, n$: $d_{(i)} = 0$

Als nächstes berechnen wir den Bruttotransfervektor T :

Aus $T = (d_{(1)}, d_{(2)}, \dots, d_{(i)}, \dots, d_{(n)}) V^{-1}$ folgt

$$T = (d_{(1)}, \sum_{j=1}^2 d_{(j)}, \dots, \sum_{j=1}^i d_{(j)}, \dots, \sum_{j=1}^{n-1} d_{(j)}, 0)$$

Damit erhalten wir für die Komponenten des Vektors T :

$$\sum_{j=1}^i d_{(j)} \geq 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, k-s-1$$

Da bei gleichen absoluten Merkmalssummen $\sum_{j=1}^n d_{(j)} = 0$ gilt, muß auch die Summe $\sum_{j=1}^k d_{(j)} = 0$ sein, da alle weiteren Komponenten $d_{(i)}$ (für $i = k+1, \dots, n$) Null sind. Aus dieser

Überlegung folgt aber:

$$\sum_{j=1}^i d_{(j)} \geq 0 \quad \text{für alle } i = k-s, \dots, k, k+1, \dots, n$$

Die gegenteilige Behauptung $\sum_{j=1}^i d_{(j)} < 0$ für ein beliebiges $i \leq k-1$ führt zu einem Widerspruch mit der Bedingung $\sum_{j=1}^k d_{(j)} = 0$, da alle weiteren $d_{(i)} \leq 0$ sind.

Insgesamt sind also alle Komponenten des Bruttotransfervektors $T = ((\tilde{Y}^0 \Pi)^0 - Y^0) V^{-1}$ nichtnegativ, was zu beweisen war.

$$R_{ST}(X, Y) \Rightarrow R_L(X, Y):$$

Aus der Voraussetzung $R_{ST}(X, Y)$ folgt unmittelbar:

$$T = (X^0 - Y^0) V^{-1} = DV^{-1} \geq \vec{0} \text{ und damit:}$$

$$T = (d_{(1)}, \sum_{j=1}^2 d_{(j)}, \dots, \sum_{j=1}^i d_{(j)}, \dots, \sum_{j=1}^{n-1} d_{(j)}, 0) \geq \vec{0}$$

woraus wir für alle n Komponenten schließen:

$$\sum_{j=1}^i d_{(j)} = \sum_{j=1}^i (x_{(j)} - y_{(j)}) \geq 0$$

Da die Verteilungen X und Y nach Voraussetzung die gleichen absoluten Merkmalssummen aufweisen, erhalten wir daraus:

$$n(X)^{-1} \sum_{j=1}^i x_{(j)} - n(Y)^{-1} \sum_{j=1}^i y_{(j)} \geq 0 \text{ oder:}$$

$$L_X(p_i) - L_Y(p_i) \geq 0 \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

was $R_L(X, Y)$ impliziert und zu beweisen war.

Die von den drei Transfer-Maßstäben vorgenommene Einstufung eines beliebigen Verteilungspaares ist also einheitlich. Alle drei Maßstäbe eignen sich damit gleich gut als normative Basis sozialer Präferenz. Darüber hinaus steht dieses Bild normativer Solidarität nicht im Widerspruch zum positiven Lorenz-Maßstab. Dieser ordnet vielmehr die Ungleichheitsgrade von Verteilungen entsprechend ihrer sozialen Präferenz.

Damit genügt der positive Lorenz-Maßstab dem von Dalton vorgeschlagenen Transfer-Kriterium (1):

"We have, first, what may be called the principle of transfers.

... we may safely say that, if there are only two income-receivers, and a transfer of income takes place from the richer to the poorer, inequality is diminished. There is, indeed, an obvious limiting condition. For the transfer must not be so large, as more than to reverse the relative positions of the two income-receivers, and it will produce its maximum result, that is to say, create equality, when it is equal to half the difference between the two incomes. And we may safely go further and say that, however great the number of income-receivers and whatever the amount of their incomes, any transfer between any two of them, or, in general, any series of such transfers, subject to the above condition, will diminish inequality."

Diese Aussage ist gemäß den in den Abschnitten 4.2. und 4.3. gemachten Ausführungen auch für lineare Maßstäbe bzw. Maße (2) mit strikt monoton wachsenden Gewichtsfunktionen richtig. Formal erhalten wir also:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: Y = t_P^R(X) \Rightarrow \begin{cases} R_L(Y, X) \\ R_G(Y, X) \\ G_G(X) \geq G_G(Y) \end{cases}$$

Unter Ausschluß von Nullsummen-Transfers folgt speziell:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: Y = t_P^R(X) \text{ und nicht } X = t_P^R(Y) \Rightarrow \begin{cases} P_L(Y, X) \\ P_G(Y, X) \\ G_G(X) > G_G(Y) \end{cases}$$

Lineare Maßstäbe bzw. Maße mit lediglich schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktionen genügen einer schwächeren Version des Dalton-Transfer-Kriteriums: Ein Pigou-Dalton Transfer vergrößert zumindest nicht die von ihnen ausgewiesene Disparität (3).

(1) H. Dalton, The Measurement of the Inequality of
a.a.O., S. 351

(2) Vgl. die für lineare Maße gemachten Ausführungen
F. Mehran, Linear Measures of Income Inequality,
S. 807

(3) Vgl. ebd. S. 808

7. Ordinale bzw. semikardinale Verteilungsmaße

7.1. Das Konzept der sozialen Wohlfahrtsfunktion

In einer ersten Konkretisierung der von Dalton wie von Aigner und Heins vorgetragenen Forderungen entwickelten wir im vorangegangenen Kapitel eine Reihe normativer Verteilungsmaßstäbe, die wir als unvollständige soziale Präferenzrelationen interpretieren können.

In einem zweiten Schritt unterstellen wir nun eine direkte funktionale Beziehung zwischen Einkommen und Wohlfahrt. Wir erfassen die Wohlfahrtswirkungen des Einkommens und seiner Verteilung durch gesamtwirtschaftliche Wohlfahrtsfunktionen, wobei wir die folgende Definition zugrunde legen:

Def.: Eine soziale (gesamtwirtschaftliche) Wohlfahrtsfunktion ist eine Funktion W , die jedem Verteilungsvektor $X \in \mathbb{R}_n^+$ eine reellwertige nichtnegative Zahl $W(X) \in \mathbb{R}_1^+$ zuordnet (1):

$$w: \mathbb{R}_n^+ \ni X \mapsto w(X) \in \mathbb{R}_1^+$$

und dabei die folgenden Eigenschaften aufweist

1) W ist in X zumindest schwach monoton wachsend:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \forall l > 1: W(lX) \geq W(X)$$

(1) Gemäß des von Samuelson in der Tradition Bergson's entwickelten Konzepts einer sozialen Wohlfahrtsfunktion sollte W alle Faktoren zentralen, welche die soziale Wohlfahrt beeinflussen: $W = W(X, z_1, z_2, \dots)$. In unserer Analyse nehmen wir diese Faktoren jedoch als konstant an. Vgl. dazu: P.A. Samuelson, Foundations of Economic Analysis, Cambridge, Harvard University Press, 1948, S. 221

Die gesamtwirtschaftliche Wohlfahrt verringert sich bei einer Zunahme der absoluten Merkmalssumme zumindest nicht.

- 2) Die Funktion W ist symmetrisch, d.h. sie ist invariant bezüglich aller beliebigen Permutationsmatrizen Π :

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } \forall \Pi: W(X) = W(X\Pi)$$

Die Information über die jeweiligen "Namen" der Einkommensbezieher ist für das gesamtwirtschaftliche Wohlfahrtsniveau ohne Belang.

- 3) Die Funktion W ist transferpräferierend, d.h. für alle beliebigen Verteilungen $X \in \mathbb{R}_n^+$ gilt

$$W(X^0 + TV) \geq W(X^0) \quad \text{für alle } T \in T_X \geq \vec{0}$$

wobei die quadratische Matrix V mit der Dimension $n \times n$ das Aussehen (1)

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hat und die Menge T_X mit

$$T_X = \{T \mid T = (t_{(1)}, \dots, t_{(n-1)}, 0) \text{ und } X^0 + TV = (X^0 + TV)^a\}$$

bezüglich der Verteilung X definiert ist.

(1) Siehe dazu auch Abschnitt 6.3. dieser Arbeit.

Hinter der formalen Definition einer transferpräferenzrenden Funktion steht folgendes Konzept:

Für jede vorgegebene Referenzverteilung X^0 bestimmen wir mit T_X die Menge aller Bruttotransfervektoren, für die die mit Hilfe der Matrix V gewonnenen Vektoren $X^0 + TV$ der Größe nach geordnet sind. Damit beschreibt jeder geordnete Vektor $X^0 + TV$ eine Verteilung, die durch maximal $n-1$ simultan stattfindende Transfers aus der ebenfalls geordneten Ausgangsverteilung X^0 erhalten werden kann. Die dazu erforderlichen Transfers werden durch die Komponenten des Bruttotransfervektors T angegeben (1). Sind diese ausschließlich nichtnegativ, so wird $X^0 + TV$ ein ebenso hohes wenn nicht höheres Wohlfahrtsniveau als X^0 aufweisen, wenn die zugrundeliegende Funktion der Eigenschaft der Transferpräferenz genügt.

Für alle so definierten sozialen Wohlfahrtsfunktionen gelten die beiden fundamentalen Ungleichungen:

$$\forall X \in R_n^+: w(X_g) \geq w(X)$$

$$\forall X \in R_n^+: w(X) \geq w(X_u^0)$$

Zum Beweis bemerken wir, daß X_g größtes bzw. X_u kleinstes Element des Lorenz-Maßstabes R_L ist. Dann folgen aus der Äquivalenz der Maßstäbe R_L und R_{ST} die Beziehungen (2):

$$\forall X \in R_n^+: T_X \ni T = (X_g - X^0)V^{-1} \geq \vec{0}$$

$$\forall X \in R_n^+: T_{X_u} \ni T = (X^0 - X_u)V^{-1} \geq \vec{0}$$

woraus wir unmittelbar die gesuchten Ungleichungen

$$\forall X \in R_n^+: w(X_g) = w(X^0 + (X_g - X^0)V^{-1}V) \geq w(X^0) = w(X)$$

$$\forall X \in R_n^+: w(X) = w(X^0) = w(X_u^0 + (X^0 - X_u)V^{-1}V) \geq w(X_u^0)$$

erhalten.

(1) Siehe dazu Abschnitt 6.3. dieser Arbeit.

(2) Siehe dazu Abschnitt 6.4. dieser Arbeit.

Bisher haben wir die Differenzierbarkeit von W nicht explizit angesprochen. Ist W zusätzlich in allen Komponenten x_i des Verteilungsvektors X differenzierbar, so sollen die ersten partiellen Ableitungen von W nach x_i stets strikt positiv sein:

$$\frac{\partial W(X)}{\partial x_i} = w_i'(X) > 0 \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

Ferner treffen wir für die zweiten partiellen Ableitungen die ergänzenden Annahmen:

$$\frac{\partial^2 W(X)}{\partial x_i \partial x_j} = w_{ij}''(X) \geq 0 \quad \text{für alle } i, j = 1, 2, \dots, n \\ i \neq j$$

$$\frac{\partial^2 W(X)}{\partial x_i \partial x_i} = w_{ii}''(X) \leq 0 \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

Benötigen wir im weiteren Verlauf der Arbeit die zusätzliche Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Wohlfahrtsfunktion, so sollen diese Annahmen stets erfüllt sein

Für differenzierbare wohlfahrtsfunktionen können wir das folgende interessante Lemma aufstellen:

Lemma: Ist die soziale wohlfahrtsfunktion W differenzierbar in allen Komponenten des Verteilungsvektors X , so folgt aus der Symmetrieeigenschaft $w(X) = w(XII)$:

$$a) \quad w_i'(X) = w_j'(X) \quad \text{falls } x_i = x_j$$

$$b) \quad -\frac{dx_i}{dx_j} = 1 \quad \text{falls } x_i = x_j$$

$$c) \quad w_i'(X) = w_{1j}'(XII) \quad \text{falls } x_i = x_{1j}$$

und II beliebige Permutationsmatrix.

Beweis: Für den Beweis der Behauptung a) geben wir uns eine beliebige Verteilung $X \in K_n^+$ vor mit:

$$X = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n)$$

wobei nach Voraussetzung $x_i = x_j$ gelten soll.

Aus der Definition der ersten partiellen Ableitung von w nach x_i folgt zunächst:

$$\begin{aligned} w'_i(X) &= \frac{\partial w(\dots)}{\partial x_i} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i+h, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n) - w(X)}{h} \end{aligned}$$

Da w symmetrisch ist und $x_i = x_j$, so folgt daraus:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{j-1}, x_j+h, \dots, x_n) - w(X)}{h} \\ &= \frac{\partial w(X)}{\partial x_j} = w'_j(X) \quad \text{was zu beweisen war.} \end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis können wir unmittelbar Behauptung b) beweisen: Wir bilden dazu das totale Differential von w bei einer marginalen Änderung von x_i und x_j :

$$dw(X) = w'_i dx_i + w'_j dx_j$$

Die gesamte Wohlfahrtsänderung im Vergleich zur Ausgangssituation ist gleich der Änderung von x_i multipliziert mit der daraus resultierenden Wohlfahrtsänderung und der Änderung von x_j , die ebenfalls mit der daraus hervorgerufenen Wohlfahrtsänderung multipliziert werden muß.

Wir fragen nun nach denjenigen Einkommensänderungen dx_i und dx_j , bei denen sich das Wohlfahrtsniveau nicht ändert, d.h. es gelte $dW = 0$. Wir erhalten:

$$0 = W'_i(X)dx_i + dW'_j(X)dx_j \quad \text{oder aber:}$$

$$- \frac{dx_i}{dx_j} = \frac{W'_j(X)}{W'_i(X)}$$

Bezeichnen wir den Differentialquotienten $\frac{dx_i}{dx_j}$ als marginale Substitutionsrate der Einkommen x_i und x_j , so erhalten wir mit $w'_i(X) = W'_i(X)$ bei $x_i = x_j$ unmittelbar:

$$- \frac{dx_i}{dx_j} = \frac{W'_j(X)}{W'_i(X)} = 1 \quad \text{was zu beweisen war.}$$

Behauptung c) beweisen wir analog wie a): Wir geben uns dazu die Verteilungen X und XII mit:

$$X = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n) \quad \text{und}$$

$$XII = (x_{i_1}, \dots, x_{i_{i-1}}, x_{i_i}, \dots, x_{i_{j-1}}, x_{i_j}, \dots, x_{i_n})$$

vor und berücksichtigen, daß nach Voraussetzung $x_i = x_{i_j}$ gelten soll.

Aus der Definition der ersten partiellen Ableitung von W nach x_i folgt zunächst:

$$W'_i = \frac{\partial W(X)}{\partial x_i}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{W(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i+h, \dots, x_{j-1}, x_j, \dots, x_n) - W(X)}{h}$$

Da w symmetrisch ist und $x_i = x_{i_j}$, so folgt daraus:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(x_{i_1}, \dots, x_{i_{i-1}}, x_{i_i}, \dots, x_{i_{j-1}}, x_{i_j} + h, \dots, x_{i_n}) - w(\text{XII})}{h}$$

$$= \frac{\partial w(\text{XII})}{\partial x_{i_j}} = w'_{i_j}(X) \quad \text{was zu beweisen war.}$$

Fassen wir zusammen: Ist die zugrunde gelegte gesamtwirtschaftliche Wohlfahrtsfunktion differenzierbar, so folgt aus der Symmetrieeigenschaft $w(X) = w(\text{XII})$ zunächst, daß der aus einer Erhöhung des Einkommens des i -ten Bezieher resultierende Wohlfahrtszuwachs $w'_i(X)$ gleich der Wohlfahrtsveränderung $w'_j(X)$ ist, falls beide Bezieher in der Ausgangssituation gleiche Einkommen aufwiesen. In diesem Fall muß die Grenzrate der Substitution $-\frac{dx_i}{dx_j}$ zwischen den Einkommen x_i und x_j gerade Eins betragen: Eine Erhöhung des Einkommens des Bezieher i um eine Einheit läßt das soziale Wohlfahrtsniveau w gerade dann unverändert, wenn das Einkommen des j -ten Bezieher um eben diese Einheit gesenkt wird. Schließlich ist der marginale Wohlfahrtszuwachs $w'_i(X)$ unabhängig davon, welcher spezifische Einkommensbezieher i gerade das entsprechende Einkommen bezieht: In eine symmetrische Wohlfahrtsfunktion gehen eben nur die Einkommen selbst ein, nicht aber die Namen der jeweiligen Einkommensbezieher.

In unserem spezifischen Fall läßt sich die Grenzrate der Substitution zwischen den Einkommen x_i und x_j auch als Grenztransferrate (1) interpretieren: Sind die Einkommen x_i und x_j gleichverteilt, so kann durch einen infinitesimalen Transfer von Bezieher j an Bezieher i die Wohlfahrt nicht mehr erhöht werden.

(1) Vgl. R. Bürk und W. Gehrig, Indices of Income Inequality and Societal Income. An Axiomatic Approach, in: Theory and Applications of Economic Indices, Hrsg.: W. Eichhorn, R. Henn, O. Opitz, R. W. Shephard, Physica Verlag, Würzburg, 1978, S. 327

Zwei weitere Eigenschaften können wir für den Spezialfall differenzierbarer, homothetischer Wohlfahrtsfunktionen festhalten:

Lemma: Ist die Wohlfahrtsfunktion W sowohl differenzierbar wie auch homothetisch, so gilt:

$$a) - \frac{dx_i}{dx_j} = \frac{w_j^!(X)}{w_i^!(X)} = \frac{w_j^!(lX)}{w_i^!(lX)} \quad \text{für alle } l > 0$$

d.h. die Grenzraten der Substitution sind für alle auf einer Ursprungsgerade liegenden Punkte gleich (1).

b) Aus $w_i^!(X) = w_{i_j}^!(XII)$ bei $x_i = x_{i_j}$ folgt:

$w(X) = W(XII)$; dabei kann II beliebig gewählt werden.

Beweis: Jede homothetische Funktion ist darstellbar als strikt monoton wachsende Transformation einer linear homogenen Funktion (2):

$$\begin{aligned} w(X) &= H(w(X)) \quad \text{und} \\ w(X) &= H^{-1}(w(X)) \quad \text{ist linear homogen, d.h.:} \\ w(lX) &= lH^{-1}(w(X)) \quad \text{für alle } l > 0. \end{aligned}$$

Eine homothetische soziale Wohlfahrtsfunktion W geht also aus ihrer linear homogenen Repräsentation w durch Anwendung der strikt monoton wachsenden und damit eindeutig umkehrbaren Transformation H hervor.

-
- (1) Dies entspricht einem geradlinigen Expansionspfad bei homothetischen Produktionsfunktionen. Siehe dazu etwa: H.Hesse, R.Linde, Gesamtwirtschaftliche Produktionstheorie, Teil 1, Physica-Verlag, Würzburg, 1976, S. 146
- (2) Vgl. W.Eichhorn, Functional Equations in Economics, Addison-Wesley Publishing Company, London usw., 1978, S. 38
- Vgl. C.E.Ferguson, The Neoclassical Theory of Production and Distribution, Cambridge at the University Press, 1969, S. 124

Nach unserer Definition ist somit jede linear homogene Wohlfahrtsfunktion homothetisch, während homothetische Wohlfahrtsfunktionen nicht notwendig linear homogen sein müssen.

Nach diesen Vorarbeiten beweisen wir zunächst Behauptung a):

$$\frac{w_j^!(1X)}{w_i^!(1X)} = \frac{H'(\overset{0}{w}_j^!(1X))}{H'(\overset{0}{w}_i^!(1X))} = \frac{H'(\overset{0}{w}_j^!(X))}{H'(\overset{0}{w}_i^!(X))} = \frac{w_j^!(X)}{w_i^!(X)}$$

da $\overset{0}{W}(X)$ linear homogen ist und die ersten partiellen Ableitungen einer linear homogenen Funktion stets homogen vom Grad Null sind (1).

Behauptung b) folgt unmittelbar aus Euler's Theorem (2), das wir auf die Funktion $\overset{0}{W}$ anwenden können. Wir erhalten daraus die folgenden Darstellungen für $W(X)$ und $W(XII)$ für beliebiges II:

$$W(X) = H(\overset{0}{W}(X)) = H\left(\sum_{i=1}^n \overset{0}{w}_i^!(X)x_i\right) \quad \text{bzw.}$$

$$W(XII) = H(\overset{0}{W}(XII)) = H\left(\sum_{i=1}^n \overset{0}{w}_{ij}^!(XII)x_{ij}\right)$$

$$\text{Da } w_i^!(X) = w_{ij}^!(XII) = H'(\overset{0}{w}_i^!(X)) = H'(\overset{0}{w}_{ij}^!(XII))$$

$$\text{falls } x_i = x_{ij}, \text{ so folgt: } \overset{0}{w}_i^!(X) = \overset{0}{w}_{ij}^!(XII)$$

woraus wir unmittelbar unsere Behauptung erhalten:

$$W(X) = H\left(\sum_{i=1}^n \overset{0}{w}_i^!(X)x_i\right) = H\left(\sum_{i=1}^n \overset{0}{w}_{ij}^!(XII)x_{ij}\right) = W(XII)$$

-
- (1) Eine Funktion $f(X)$, die homogen vom Grad r in X ist, besitzt allgemein erste partielle Ableitungen $f_i^!(X)$, die homogen vom Grad $r-1$ sind. Siehe dazu: W. Eichhorn, *Functional Equations in Economics*, a.a.O., S. 73
- (2) Derslb., ebd., S. 71, wobei wir den Homogenitätsgrad r gleich Eins gesetzt haben.

7.2. Utilitaristische Wohlfahrtsfunktionen

Die bisher betrachteten sozialen Wohlfahrtsfunktionen können als normative ordinale Verteilungsmaße aufgefaßt werden, d.h. jede strikt monoton wachsende Transformation φ auf eine beliebige Wohlfahrtsfunktion W angewandt ergibt wieder eine soziale Wohlfahrtsfunktion $\varphi[W(X)]$, die mit der ursprünglichen Funktion W ordinal äquivalent ist. Darüber hinaus ist W im allgemeinen nicht-individualistisch, d.h. W ist direkt auf der Menge der Verteilungsvektoren X definiert, ohne etwaige Nutzenvorstellungen der einzelnen Einkommensbezieher direkt zu berücksichtigen. Unter Einbeziehung der individuellen Nutzenvorstellungen können wir einen Spezialfall allgemeiner Wohlfahrtsfunktionen definieren, nämlich die utilitaristische Wohlfahrtsfunktion, die eingeschränkt semi-kardinales Meßniveau aufweist (1):

Def.: Eine soziale Wohlfahrtsfunktion heißt genau dann utilitaristisch, wenn sie als gleich gewichtete Summe individueller Nutzenfunktionen U_i^+ darstellbar ist, d.h.:

$$\forall X \in R_n^+: \quad W(X) = \sum_{i=1}^n U_i^+(x_i) \frac{1}{n}$$

Dabei sind die U_i^+ individuelle zumindest schwach monoton wachsende konkave Nutzenfunktionen, die bis auf ein Absolutglied A_i identisch sind, d.h.:

$$U_i^+(x_i) = A_i + U_i(x_i) \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{mit: } U_i(x_i) = U_j(x_j) \text{ falls } x_i = x_j$$

(1) Vgl. dazu: A.K. Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 15 ff.

Jede utilitaristische Wohlfahrtsfunktion gehört der Klasse aller Funktionen an, die in der additiv separablen Form:

$$W(X) = \Psi \left[\sum_{i=1}^n (A_i + U_i(x_i)) \right]$$

darstellbar sind. Die Voraussetzung dafür gibt im Fall der Differenzierbarkeit von W der folgende Satz an:

Satz: Sei W eine differenzierbare Wohlfahrtsfunktion.

Ist die Grenzrate der Substitution zwischen den Einkommen x_i und x_j allein eine Funktion dieser beiden Einkommen, d.h. gilt:

$$-\frac{dx_i}{dx_j} = \frac{W'_j(X)}{W'_i(X)} = W_{ij}(x_i, x_j)$$

so ist W in der additiv separablen Form:

$$W(X) = \Psi \left[\sum_{i=1}^n (A_i + U_i(x_i)) \right]$$

mit $U_i(x_i) = U_j(x_j)$ falls $x_i = x_j$ darstellbar.

Der Beweis stützt sich auf die Arbeit von Green (1).
Zunächst impliziert die Annahme:

$$\frac{W'_j(X)}{W'_i(X)} = W_{ij}(x_i, x_j)$$

die Existenz von n Funktionen $U'_1(x_1), \dots, U'_n(x_n)$, so daß wir für die Grenzrate der Substitution:

$$W_{ij}(x_i, x_j) = \frac{U'_j(x_j)}{U'_i(x_i)}$$

für alle $i, j = 1, 2, \dots, n$ erhalten (2).

-
- (1) Siehe dazu Lemma 2.1. und 2.2. sowie Theorem 2 in:
H.A.J.Green, Aggregation in Economic Analysis,
Princeton University Press, Princeton, 1964, S. 17 ff.
- (2) Dies folgt speziell aus Green's Lemma 2.2.

Aus der Symmetrie der Wohlfahrtsfunktion W folgt (1):

$$W_{ij}(x_i, x_j) = 1$$

unter der Voraussetzung $x_i = x_j$, woraus wir unmittelbar:

$$U'_i(x_i) = U'_j(x_j)$$

erhalten, d.h. alle Funktionen $U_i(x_i)$ sind identisch.

Sei nun $O(X)$ eine Funktion, deren erste partielle Ableitungen gerade $U'_i(x_i)$ betragen. Dann erhalten wir für das totale Differential $dO(X)$ der Funktion $O(X)$:

$$dO(X) = \sum_{i=1}^n U'_i(x_i) dx_i$$

und durch beidseitiges Integrieren die Funktion $O(X)$ selbst:

$$O(X) = \sum_{i=1}^n (A_i + U_i(x_i))$$

mit $A_i + U_i(x_i)$ als Stammfunktion von $U'_i(x_i)$.

Da die partiellen Ableitungen $W'_i(X)$ und $O'_i(X) = U'_i(x_i)$ stets einander proportional sind, so können wir nach Green $W(X)$ als Funktion von $O(X)$ auffassen (2):

$$W(X) = \Psi \left[\sum_{i=1}^n (A_i + U_i(x_i)) \right]$$

was zu beweisen war.

Die additiv separable Funktion $W(X)$ ist freilich erst dann gemäß unserer Definition als utilitaristische Wohlfahrtsfunktion interpretierbar, wenn zusätzlich die Normierung $\Psi[O(X)] = \frac{1}{n}O(X)$ eingeführt wird und W konkav ist.

(1) Siehe dazu Abschnitt 7.1. dieser Arbeit.

(2) Vgl. H.A.J.Green, Aggregation in Economic Analysis, a.a.O., S. 19

Beweis: Aus $\Psi[\bar{O}(X)] = \frac{1}{n} \bar{O}(X)$ folgt unmittelbar:

$$w(X) = \sum_{i=1}^n (A_i + U_i(x_i)) \frac{1}{n}$$

Ferner impliziert die Konkavität von $w(X)$ die Konkavität der individuellen Nutzenfunktionen $U_i^+(x_i) = A_i + U_i(x_i)$.

Wir lösen dazu den obenstehenden Ausdruck nach $U_k^+(x_k)$ auf:

$$A_k + U_k(x_k) = nw(X) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (A_i + U_i(x_i)) \quad \text{und damit:}$$

$$U_k^+(x_k) = nw(X) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n U_i^+(x_i)$$

Nun geben wir uns die beiden spezifischen Verteilungen X und Y vor mit $x_i = y_i$ für $i \neq k$ und $x_k \neq y_k$. Dann erhalten wir für alle β aus dem Intervall $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} U_k^+(\beta x_k + (1-\beta)y_k) &= nW(\beta X + (1-\beta)Y) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n U_i^+(\beta x_i + (1-\beta)y_i)) \\ &\geq \beta \left[nw(X) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n U_i^+(x_i) \right] + (1-\beta) \left[nw(Y) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n U_i^+(y_i) \right] \\ &= \beta U_k^+(x_k) + (1-\beta) U_k^+(y_k) \end{aligned}$$

Diese Ungleichung ist offensichtlich auch für den Spezialfall $x_k = y_k$ erfüllt, womit wir die Konkavität von U_k^+ nachgewiesen hätten. Damit sind auch alle anderen Funktionen konkav, da sie sich von U_k^+ nur durch die additive Konstante A_i jeweils unterscheiden.

7.3. Paretianische Wohlfahrtsfunktionen

Die im letzten Abschnitt betrachteten utilitaristischen Wohlfahrtsfunktionen waren auf Grund der einfachen Addierung der individuellen Nutzenfunktionen unnötig restriktiv: Dehnen wir die Klasse sozialer Wohlfahrtsfunktionen auf nichtadditive Funktionen aus, so erhalten wir Wohlfahrtsfunktionen des paretianischen Typs (1):

Def.: Eine soziale Wohlfahrtsfunktion W heißt genau dann paretianisch, wenn sie als eine Funktion der individuellen Nutzenfunktionen dargestellt werden kann:

$$\forall x \in \mathbb{R}_n^+: W(x) = S(U_1(x_1), U_2(x_2), \dots, U_n(x_n))$$

und dabei folgende Eigenschaften aufweist:

- Alle U_i sind identische individuelle kardinale Nutzenfunktionen, die zumindest schwach monoton wachsend sind:

$$U_i(x_i) = U_j(x_j) \text{ für } x_i = x_j; U_i(x_i) \geq U_i(x'_i) \text{ für } x_i > x'_i$$

- Die Funktion S ist in jeder Komponente U_i zumindest schwach monoton wachsend, d.h.:

$$S(U_1, U_2, \dots, U_n) \geq S(U_1, U_2', \dots, U_n')$$

$$\text{mit } U_i = U_i' \text{ für } i \neq k \text{ und } U_k > U_k'$$

- Die Funktion S ist symmetrisch in allen U_i , d.h. für alle beliebigen Permutationsmatrizen Π gilt:

$$S((U_1, U_2, \dots, U_n)\Pi) = S(U_1, U_2, \dots, U_n)$$

(1) Zum Begriff einer paretianischen Wohlfahrtsfunktion siehe etwa: D.M. Winch, *Analytical Welfare Economics*, Penguin Education, Harmondsworth, 1973, S. 34 ff.

- die Funktion S ist konkav in den individuellen Nutzenfunktionen U_i , d.h. für alle $B \in [0, 1]$:

$$S(BU_1 + (1-B)U_1^*, \dots, BU_n + (1-B)U_n^*) \geq \\ BS(U_1, \dots, U_n) + (1-B)S(U_1^*, \dots, U_n^*)$$

- alle individuellen Nutzenfunktionen U_i sind konkav in x_i , d.h. für alle $B \in [0, 1]$:

$$U_i(Bx_i + (1-B)y_i) \geq BU_i(x_i) + (1-B)U_i(y_i)$$

Aus den beiden letzten Eigenschaften folgt sofort das Lemma:

Lemma: Jede paretianische Wohlfahrtsfunktion W ist konkav in X , d.h. für alle $B \in [0, 1]$:

$$W(BX + (1-B)Y) \geq BW(X) + (1-B)W(Y)$$

Beweis: $W(BX + (1-B)Y)$

$$= S(U_1(Bx_1 + (1-B)y_1), \dots, U_n(Bx_n + (1-B)y_n)) \\ \geq S(BU_1(x_1) + (1-B)U_1(y_1), \dots, BU_n(x_n) + (1-B)U_n(y_n)) \\ \text{da } S \text{ schwach wachsend und alle } U_i \text{ konkav sind,} \\ \geq BS(U_1(x_1), \dots, U_n(x_n)) + (1-B)S(U_1(y_1), \dots, U_n(y_n)) \\ \text{da } S \text{ konkav in den individuellen Nutzen ist,} \\ = BW(X) + (1-B)W(Y) \text{ was zu beweisen war.}$$

Ist darüber hinaus S strikt konkav in den individuellen Nutzen und diese strikt konkav in allen x_i , so ist die paretianische Wohlfahrtsfunktion W ebenfalls strikt konkav. Der Beweis ist evident.

(1) Siehe dazu auch Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 50

Wir können damit alle utilitaristischen Wohlfahrtsfunktionen mit konstanten Absolutgliedern ($A_i = A$ für alle i) als paretianische Wohlfahrtsfunktionen auffassen.

Die Wohlfahrtsfunktion W ist in allen Argumenten x_i differenzierbar mit positiven partiellen Ableitungen, wenn die individuellen Nutzenfunktionen differenzierbar sind sowie die ersten partiellen Ableitungen der Funktion S nach den U_i existieren mit:

$$\frac{dS}{dU_i} = S'_i > 0 \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

Ferner können wir das folgende Lemma aufstellen:

Lemma: Ist die soziale Wohlfahrtsfunktion W des paretianischen Typs differenzierbar, so folgt aus $W(X) = W(XII)$ für alle $X \in \mathbb{R}_n^+$ und alle II :

- a) $S'_i = S'_j$ falls $U_i = U_j$
- b) $-\frac{dU_i}{dU_j} = \frac{S'_j}{S'_i} = 1$ falls $U_i = U_j$
- c) $S'_i(U_1, \dots, U_n) = S'_{i,j}((U_1, \dots, U_n)II)$
falls $U_i = U_{i,j}$.

Beweis: Da alle individuellen Nutzenfunktionen $U_i(x_i)$ identisch sind, folgt aus $U_i = U_j$, daß $x_i = x_j$ gelten muß. Dies impliziert zusammen mit $W(X) = W(XII)$ und der Differenzierbarkeit von W (1), daß

$$W'_i(X) = W'_j(X) \quad \text{und} \quad U'_i(x_i) = U'_j(x_j) \quad \text{gilt.}$$

Da nun $W'_i(X) = S'_i U'_i(x_i)$ und $W'_j(X) = S'_j U'_j(x_j)$ ist, folgt daraus $S'_i = S'_j$ für $U_i = U_j$, womit Behauptung a) bewiesen wäre.

(1) Siehe dazu Abschnitt 7.1. dieser Arbeit.

Damit können wir aber unmittelbar Behauptung b) beweisen: Wir bilden dazu das totale Differential von S bei einer marginalen Änderung von U_i und U_j :

$$dS = S'_i dU_i + S'_j dU_j$$

Wir fragen nun nach denjenigen Nutzenänderungen dU_i und dU_j , bei denen sich das Wohlfahrtsniveau S nicht ändert, d.h. es gelte $dS = 0$. Daraus folgt:

$$0 = S'_i dU_i + S'_j dU_j$$

Somit erhalten wir für den Fall $U_i = U_j$ unter Benützung der Behauptung a) für die marginale Substitutionsrate zwischen den Nutzenniveaus U_i und U_j :

$$-\frac{dU_i}{dU_j} = \frac{S'_j}{S'_i} = 1 \quad \text{was zu beweisen war.}$$

Für den Beweis der Behauptung c) überlegen wir, daß

$$\begin{aligned} w(\text{XII}) = w(X) &= S(U_1(x_1), U_2(x_2), \dots, U_n(x_n)) \\ &= S(U_{i_1}(x_{i_1}), U_{i_2}(x_{i_2}), \dots, U_{i_n}(x_{i_n})) \\ &= S((U_1, U_2, \dots, U_n)\text{II}) \text{ gelten muß, da} \end{aligned}$$

W symmetrisch in X und S symmetrisch in allen U_i ist. Weiterhin folgt aus der Voraussetzung $U_i = U_{i_j}$, daß $x_i = x_{i_j}$ gelten muß. Dies impliziert zusammen mit $w(X) = w(\text{XII})$ und der Differenzierbarkeit von w , daß:

$$w'_i(X) = w'_{i_j}(\text{XII}) \text{ und } U'_i(x_i) = U'_{i_j}(x_{i_j}) \text{ gilt.}$$

Dan nun $w'_i(X) = S'_i(U_1, \dots, U_n)U'_i(x_i)$ und weiterhin

$$w'_{i_j}(\text{XII}) = S'_{i_j}((U_1, \dots, U_n)\text{II})U'_{i_j}(x_{i_j}) \text{ ist, so}$$

folgt daraus: $S'_i(U_1, \dots, U_n) = S'_{i_j}((U_1, \dots, U_n)\text{II})$,

womit auch Behauptung c) bewiesen wäre.

7.4. Konkave wohlfahrtsfunktionen und Transferpräferenz

Die in den Abschnitten 7.2. und 7.3. eingeführten utilitaristischen und paretianischen wohlfahrtsfunktionen waren laut Voraussetzung zumindest konkav. Damit sie wirklich nach unserer Definition (1) als Wohlfahrtsfunktion interpretiert werden dürfen, müssen wir noch den Beweis antreten, daß sie auch der Eigenschaft der Transferpräferenz genügen. Dazu benötigen wir zunächst das folgende Lemma:

Lemma: Gegeben sei eine symmetrische, differenzierbare, zumindest konkave Wohlfahrtsfunktion W und eine beliebige geordnete Verteilung $X^0 \in \mathbb{R}_n^+$. Dann gilt:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : \quad W'_{(i)}(X^0) \geq W'_{(j)}(X^0) \quad \text{falls } x_{(i)} \leq x_{(j)}$$

d.h. die ersten partiellen Ableitungen nach den geordneten Komponenten sind gerade umgekehrt geordnet.

$$\begin{aligned} \text{Beweis:} \quad W'_{(i)}(X^0) &= W'_{(i)}(x_{(1)}, \dots, x_{(i)}, \dots, x_{(j)}, \dots, x_{(n)}) \\ &\geq W'_{(i)}(x_{(1)}, \dots, x_{(j)}, \dots, x_{(j)}, \dots, x_{(n)}) \\ &\quad \text{da } W \text{ zumindest konkav ist,} \\ &= W'_{(j)}(x_{(1)}, \dots, x_{(j)}, \dots, x_{(j)}, \dots, x_{(n)}) \\ &\quad \text{da } W \text{ symmetrisch ist,} \\ &\geq W'_{(j)}(x_{(1)}, \dots, x_{(i)}, \dots, x_{(j)}, \dots, x_{(n)}) \\ &\quad \text{da } W \text{ differenzierbar ist mit } W''_{ji}(X) \geq 0 \\ &= W'_{(j)}(X^0) \text{ was zu beweisen war.} \end{aligned}$$

(1) Vgl. dazu Abschnitt 7.1. dieser Arbeit.

Nach diesen Vorarbeiten können wir den Satz aufstellen:

Satz: Alle konkaven und differenzierbaren Wohlfahrtsfunktionen W sind transferpräferierend, d.h. für alle beliebigen Verteilungen $X \in \mathbb{R}_n^+$ gilt:

$$W(X^0 + TV) \geq W(X^0) \quad \text{für alle } T \in \mathbb{T}_X \geq \vec{0} \text{ mit:}$$

$$\mathbb{T}_X = \{T \mid T = (t_{(1)}, \dots, t_{(n-1)}, 0) \text{ und } X^0 + TV = (X^0 + TV)^0\}$$

Beweis: Da w konkav und differenzierbar ist, so folgt für alle beliebigen Verteilungen X und Y :

$$W(X) \leq W(Y) + \sum_{i=1}^n W'_i(Y)(x_i - y_i)$$

d.h. die Tangentialhyperebene im Punkt Y kann niemals unterhalb der Funktion $w(X)$ liegen (1).

Damit erhalten wir für alle Punkte X^0 und $X^0 + TV$:

$$\begin{aligned} W(X^0 + TV) - W(X^0) &\geq \sum_{i=1}^n W'_i(X^0 + TV)(x_{(i)} + t_{(i)} - t_{(i-1)} - x_{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^n W'_i(X^0 + TV)t_{(i)} - \sum_{i=1}^n W'_i(X^0 + TV)t_{(i-1)} \\ (\text{da } t_{(0)} = t_{(n)} = 0) &= \sum_{i=1}^{n-1} W'_i(X^0 + TV)t_{(i)} - \sum_{i=1}^{n-1} W'_{i+1}(X^0 + TV)t_{(i)} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (W'_i - W'_{i+1})t_{(i)} \geq 0 \end{aligned}$$

da nach vorstehendem Lemma aus $x_{(i)} \leq x_{(i+1)}$ für alle i stets $W'_i - W'_{i+1} \geq 0$ folgt und $T \geq \vec{0}$ unmittelbar $t_{(i)} \geq 0$ impliziert.

(1) Siehe dazu: W. Ginsberg, Concavity and Quasiconcavity in Economics, Journal of Economic Theory, Vol. 6, 1973, S. 596 f.

Aus diesem Satz folgt damit für alle differenzierbaren paretianischen Wohlfahrtsfunktionen das gesuchte Ergebnis:

Korollar: Alle differenzierbaren paretianischen Wohlfahrtsfunktionen $W(X) = S(U_1(x_1), \dots, U_n(x_n))$ sind transferpräferierend.

Wir erhalten speziell für alle Verteilungen $X^0 + TV$ mit $T \in \mathbb{T}_X \geq \vec{0}$:

$$W(X^0 + TV) - W(X^0) = \sum_{i=1}^{n-1} (S'_{(i)} U'_{(i)} - S'_{(i+1)} U'_{(i+1)}) t_{(i)} \geq 0$$

da $W'_{(i)} - W'_{(i+1)} \geq 0$ unmittelbar $S'_{(i)} U'_{(i)} - S'_{(i+1)} U'_{(i+1)} \geq 0$ impliziert und $t_{(i)} \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ vorausgesetzt wurde.

Für differenzierbare utilitaristische Wohlfahrtsfunktionen ergibt sich entsprechend:

Korollar: Alle differenzierbaren utilitaristischen Wohlfahrtsfunktionen $W(X) = \sum_{i=1}^n U_i^+(x_i) \frac{1}{n}$ sind transferpräferierend.

Wiederum folgt für alle Verteilungen $X^0 + TV$ mit $T \in \mathbb{T}_X \geq \vec{0}$:

$$W(X^0 + TV) - W(X^0) = \sum_{i=1}^{n-1} (U'_{(i)} - U'_{(i+1)}) \frac{t_{(i)}}{n} \geq 0$$

Die Richtigkeit dieser Ungleichung ergibt sich unabhängig von den vorstehenden Überlegungen allein aus der Tatsache, daß für alle konkaven Nutzenfunktionen $U'_{(i)} - U'_{(i+1)} \geq 0$ gilt, falls sie differenzierbar sind, und aus der Voraussetzung $t_{(i)} \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n-1$.

Nun ist Differenzierbarkeit zwar eine hinreichende, keineswegs aber notwendige Voraussetzung dafür, daß eine konkave Wohlfahrtsfunktion transferpräferierend ist:

Satz: Jede beliebige konkave Wohlfahrtsfunktion W ist auch transferpräferierend.

Beweis: Wir geben uns die beiden Verteilungen X^0 und X^{0II}

$$\text{mit } X^0 = (x_{(1)}, \dots, x_{(k-h)}, \dots, x_{(k)}, \dots, x_{(n)})$$

$$\text{und } X^{0II} = (x_{(1)}, \dots, x_{(k)}, \dots, x_{(k-h)}, \dots, x_{(n)})$$

vor und betrachten eine Verteilung Y , die wir aus X durch einen einzelnen Pigou-Dalton Transfer t erhalten:

$$Y = (x_{(1)}, \dots, x_{(k-h)} + t, \dots, x_{(k)} - t, \dots, x_{(n)})$$

Allgemein können wir Y als gewogenen Durchschnitt aus den beiden Verteilungen X^0 und X^{0II} darstellen:

$$Y = (1-\beta)X^0 + \beta X^{0II}$$

wobei β stets im Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ liegt, da sich β aus der Bestimmungsgleichung:

$$x_{(k-h)} + t = (1-\beta)x_{(k-h)} + \beta x_{(k)}$$

mit $\beta = (x_{(k)} - x_{(k-h)})^{-1}t$ errechnet und t maximal den Wert $\frac{1}{2}(x_{(k)} - x_{(k-h)})$ annehmen kann (1).

Da W voraussetzungsgemäß konkav ist, so folgt:

$$W(Y) = W((1-\beta)X^0 + \beta X^{0II}) \geq (1-\beta)W(X^0) + \beta W(X^{0II})$$

(1) Vgl. dazu Abschnitt 6.1. dieser Arbeit.

Aus der Symmetrie von W folgt nun: $W(X^0) = W(X^0 II) = W(X)$ und somit:

$$W(Y) = W((1-\beta)X^0 + \beta X^0 II) \geq W(X)$$

oder aber unter Benützung der Schreibweise $Y = t_P^1(X)$:

$$W(t_P^1(X)) \geq W(X)$$

Wir haben damit gezeigt, daß sich durch einen einzelnen Pigou-Dalton Transfer das Wohlfahrtsniveau gegenüber der Ausgangsverteilung zumindest nicht verringert, falls die Wohlfahrtsfunktion konkav ist.

Betrachten wir nun eine andere Verteilung Z^0 , für die $Z^0 = X^0 + TV$ mit $T \geq \vec{0}$ gelten soll. Dann folgt aus der Äquivalenz der Relationen R_{ST} und R_{PDT} , daß wir Z aus X durch eine endliche Zahl von Pigou-Dalton-Transfers erhalten können (1), d.h.:

$$Z = t_P^r(X) = t_P^1[t_P^{r-1}(X)] = t_P^1\{t_P^1[\dots t_P^1(X)]\}$$

Dann impliziert die Konkavität von W unmittelbar:

$$W(Z) \geq W(t_P^{r-1}(X)) \geq W(t_P^{r-2}(X)) \geq \dots \geq W(t_P^1(X)) \geq W(X)$$

da sich durch einen einzelnen Pigou-Dalton Transfer das Wohlfahrtsniveau niemals verringern kann. Durch Zusammenfassung erhalten wir:

$$W(Z) = W(X^0 + TV) \geq W(X)$$

Da wir Z^0 frei aus allen Verteilungen $(X^0 + TV)^0$ gewählt haben, für die $T \in \mathbb{T}_X \geq \vec{0}$ gilt, folgt damit:

$$W(X^0 + TV) \geq W(X) \quad \text{für alle } T \in \mathbb{T}_X = \vec{0}$$

d.h. W ist transferpräferierend, was zu beweisen war.

(1) Vgl. dazu Abschnitt 6.4. dieser Arbeit.

Damit folgt speziell für paretianische wie auch utilitaristische Wohlfahrtsfunktionen:

Korollar: Alle paretianischen Wohlfahrtsfunktionen:

$$W(X) = S(U_1(x_1), \dots, U_n(x_n))$$

sowie alle utilitaristischen Wohlfahrtsfunktionen:

$$W(X) = \sum_{i=1}^n U_i^+(x_i) \frac{1}{n}$$

sind transferpräferierend.

Konkave Wohlfahrtsfunktionen sind jedoch nicht die einzige Klasse transferpräferierender Funktionen. Für lediglich quasikonkave Funktionen können wir den Satz aufstellen:

Satz: Jede beliebige quasikonkave Wohlfahrtsfunktion W ist auch transferpräferierend.

Beweis: Betrachten wir die schon im vorangegangenen Beweis eingeführten Verteilungen X^0 , X^{0II} und Y , so folgt aus der Quasikonkavität von W :

$$W(Y) = W((1-\beta)X^0 + \beta X^{0II}) \geq \min\{W(X^0), W(X^{0II})\}$$

Aus der Symmetrie von W folgt: $W(X^0) = W(X^{0II}) = W(X)$ und damit:

$$W(Y) = W(t_P^1(X)) \geq W(X)$$

d.h. auch für quasikonkave Funktionen verringert sich das Wohlfahrtsniveau durch einen einzelnen Pigou-Dalton Transfer zumindest nicht. Der restliche Beweis ergibt sich dann durch wörtliche Übertragung des Beweises für konkave Wohlfahrtsfunktionen.

Abschließend geben wir einen Satz an über die Beziehungen zwischen dem von uns benützten Konzept der Transferpräferenz, dem von Rothschild und Stiglitz eingeführten Begriffs der lokalen Gleichheitspräferenz (1) und der S-Konkavität (2):

Satz: Gegeben sei eine beliebige Wohlfahrtsfunktion W .
Dann sind folgende Aussagen einander äquivalent:

- a) W ist transferpräferierend.
- b) W ist S-konkav.
- c) W ist lokal gleichheitspräferierend.

Beweis: Wir beweisen die Äquivalenz der Aussagen a) - c), indem wir die Richtigkeit der Implikationskette:
 $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$ zeigen:

$a) \Rightarrow b)$: Aus der S-konkavität des Lorenz-Maßstabs (3) folgt zunächst für alle beliebigen Verteilungen X und alle bistochastischen Matrizen Q :

$$R_L(XQ, X)$$

Da die Relation R_{ST} mit R_L äquivalent ist, erhalten wir:

$$\forall Q \text{ und } \forall X \in \mathbb{R}_n^+ : T = ((XQ)^0 - X^0)V^{-1} \geq \vec{0}$$

und da W transferpräferierend ist:

$$\forall Q \text{ und } \forall X \in \mathbb{R}_n^+ : W(XQ) = W[X^0 + ((XQ)^0 - X^0)V^{-1}V] \geq W(X)$$

d.h. W ist auch S-konkav.

(1) Eine Funktion f ist lokal gleichheitspräferierend, wenn $f(BX^1 + (1-B)X) \geq f(X)$ für alle X und alle $B \in [0, 1]$
Vgl. M. Rothschild und J.E. Stiglitz, Some Further Results on the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 194 ff.

(2) Eine Funktion f ist S-konkav, wenn für alle bistochastischen Matrizen Q gilt: $f(XQ) \geq f(X)$

(3) Vgl. dazu Abschnitt 3.2. dieser Arbeit.

b) $\Rightarrow$ c): Wir gehen von einer beliebigen Verteilung X aus und bilden die Verteilung X' mit:

$$X' = (x_1, \dots, x_{k-1}, \frac{x_k + x_1}{2}, x_{k+1}, \dots, x_{l-1}, \frac{x_k + x_1}{2}, x_{l+1}, \dots, x_n)$$

In Abschnitt 3.2. hatten wir nachgewiesen, daß für alle $\beta \in [0, 1]$ stets eine bistochastische Matrix Q existiert mit der Eigenschaft:

$$XQ = \beta X' + (1-\beta)X$$

Da W voraussetzungsgemäß β -konkav ist, so folgt:

$$\forall \beta \in [0, 1] : W(XQ) = W(\beta X' + (1-\beta)X) \geq W(X)$$

d.h. W ist auch lokal gleichheitspräferierend.

c) $\Rightarrow$ a): Wir überführen eine beliebige Verteilung X durch einen Pigou-Dalton Transfer in die Verteilung Y . Definitionsgemäß dürfen wir dann schreiben (1):

$$Y^{\circ II} = \beta X^{\circ I} + (1-\beta)X^{\circ} \quad \text{mit } \beta \in [0, 1]$$

Da W lokal gleichheitspräferierend ist, erhalten wir daraus:

$$W(Y^{\circ II}) = W(\beta X^{\circ I} + (1-\beta)X^{\circ}) \geq W(X)$$

d.h. für lokal gleichheitspräferierende Funktionen verringert sich das Wohlfahrtsniveau durch einen einzelnen Pigou-Dalton Transfer gegenüber der Ausgangsverteilung zumindest nicht. Dies ist aber schon hinreichend dafür, daß die Funktionen auch transferpräferierend sind, wie man sich durch Übertragung des Beweises für konkave Wohlfahrtsfunktionen überzeugen kann.

(1) Vgl. dazu Abschnitt 6.1. dieser Arbeit.

8. Soziale Wohlfahrtsfunktionen als Grundlage normativer Verteilungsmaßstäbe

8.1. Eigenschaften normativer Verteilungsmaßstäbe

Aus jeder ordinalen wie semi-kardinalen sozialen Wohlfahrtsfunktion W läßt sich ein vollständiger normativer Verteilungsmaßstab R_W gewinnen, der die W zugrundeliegende Präferenzordnung beschreibt:

Def.: Für eine beliebige Wohlfahrtsfunktion W ist R_W mit:

$$\forall X, Y \in R_n^+: R_W(X, Y) \iff W(X) \geq W(Y)$$

der zu W gehörende normative Verteilungsmaßstab.

Geht R_W aus einer paretianischen Wohlfahrtsfunktion hervor, so bezeichnen wir ihn als paretianischen Maßstab. Entsprechend nennen wir R_W utilitaristischen Maßstab, falls W eine utilitaristische Wohlfahrtsfunktion ist.

Es ist bemerkenswert, daß utilitaristische Maßstäbe invariant bezüglich aller Transformationen des "Ursprungs" der individuellen Nutzenfunktionen U_i^+ sind. Aus der obigen Definition erhalten wir nämlich unmittelbar:

$$\forall X, Y \in R_n^+: R_W(X, Y) \iff \sum_{i=1}^n (U_i(x_i) - U_i(y_i)) \geq 0$$

Sen bemerkt dazu (1):

"Comparisons of units play a crucial part in calculating 'net advantages' in an aggregative framework, and this is the focus of utilitarianism; comparisons of levels of welfare are irrelevant to this."

-
- (1) A.K.Sen, On Weights and Measures: Informational Constraints in Social Welfare Analysis, *Econometrica*, Vol. 45, 1977, S. 1547

Siehe dazu auch: A.K.Sen, Informational Bases of Alternative Welfare Approaches, *Journal of Public Economics*, Vol. 3, 1974, S. 394 f.

Utilitaristische Verteilungsmaßstäbe setzen also lediglich die Vergleichbarkeit interpersoneller Nutzendifferenzen voraus, ohne jedoch die Vergleichbarkeit der absoluten Nutzenniveaus zu verlangen.

Daneben erfüllen utilitaristische Maßstäbe die "strikte Pareto-Bedingung" (1): Sind für alle Bezieher die individuellen Nutzenniveaus U_i für eine Verteilung X im Vergleich zu einer Verteilung Y zumindest gleich groß und für einige Empfänger sogar strikt größer, so ist die Aussage $P_w(X,Y)$ wahr (2), d.h.:

$$\forall X,Y \in R_n^+ : \left\{ \begin{array}{l} \forall i: U_i(x_i) \geq U_i(y_i) \\ \exists i: U_i(x_i) > U_i(y_i) \end{array} \right\} \Rightarrow P_w(X,Y)$$

Der Beweis ist evident, da alle utilitaristischen Wohlfahrtsfunktionen in U_i strikt monoton wachsend sind.

Alle normativen Verteilungsmaßstäbe sind vollständig Ordnungsrelationen:

Zunächst gilt für alle beliebigen Verteilungen $X \in R_n^+$:

$$w(X) = w(X) \text{ und damit } R_w(X,X)$$

womit die Reflexivität von R_w nachgewiesen wäre.

Ferner ist R_w transitiv, da aus:

$$\forall X,Y,Z \in R_n^+ : R_w(X,Y) \text{ und } R_w(Y,Z)$$

$$w(X) \geq w(Y) \text{ und } w(Y) \geq w(Z) \text{ folgt,}$$

woraus sich zusammen mit der Transitivität der "größer-als-oder-gleich" Relation ($\geq$) das gesuchte Resultat:

$$w(X) \geq w(Z) \text{ und damit } R_w(X,Z) \text{ ergibt.}$$

(1) Zur strengen Pareto-Bedingung siehe etwa: S.Maskin, A Theorem on Utilitarianism, Review of Economic Studies, Vol XIV, 1978, S. 93

(2) Die strikte Ordnungsrelation P_w ist definiert mit:

$$\forall X,Y \in R_n^+ : P_w(X,Y) \iff R_w(X,Y) \text{ und nicht } R_w(Y,X).$$

Schließlich ist R_W vollständig, da für alle $X, Y \in \mathbb{R}_n^+$ gilt:

$$W(X) \geq W(Y) \text{ und/oder } W(Y) \geq W(X), \text{ woraus}$$

$$R_W(X, Y) \text{ und/oder } R_W(Y, X) \text{ folgt,}$$

womit unsere Behauptung bewiesen wäre.

Da soziale Wohlfahrtsfunktionen definitionsgemäß symmetrisch sind, können wir ferner festhalten:

Alle normativen Verteilungsmaßstäbe R_W sind symmetrisch, d.h. für alle beliebigen Permutationsmatrizen Π gilt (1):

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : I_W(X, X\Pi)$$

Aus der Transferpräferenz sozialer Wohlfahrtsfunktionen können wir schließlich deduzieren:

Korollar: Der simultane Transfer-Maßstab R_{ST} ist Subrelation aller beliebigen normativen Verteilungsmaßstäbe R_W , d.h.:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : R_{ST}(Y, X) \implies R_W(Y, X)$$

Beweis: Aus $R_{ST}(Y, X)$ folgt zunächst:

$$T = (Y^0 - X^0)V^{-1} \geq \vec{0}$$

d.h. der Bruttotransfervektor T bezüglich der Verteilungen X und Y weist keine negativen Komponenten auf. Somit muß aber für jede transferpräferenzierende Wohlfahrtsfunktion gelten (2):

$$W(X^0 + TV) \geq W(X)$$

oder äquivalent damit $R_W(Y, X)$, was zu beweisen war.

(1) Die Äquivalenzrelation I_W ist definiert mit:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : I_W(X, Y) \iff R_W(X, Y) \text{ und } R_W(Y, X).$$

(2) Siehe dazu Abschnitt 7.1. dieser Arbeit.

8.2. Durchschnittsrelationen normativer Verteilungsmaßstäbe und der Lorenz-Maßstab

Analog zum Konzept der Durchschnittsrelation linearer Verteilungsmaßstäbe (1) führen wir den Begriff der Durchschnittsrelation normativer Verteilungsmaßstäbe ein:

Def.: Unter der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset W}$ aller normativer Verteilungsmaßstäbe verstehen wir einen Verteilungsmaßstab, der nach der Vorschrift:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : R_{\emptyset W}(X, Y) \iff \forall W : R_W(X, Y)$$

gebildet wird. Ist also unabhängig von der Gestalt der verwendeten sozialen Wohlfahrtsfunktion W (vorausgesetzt, sie ist symmetrisch, zumindest schwach monoton wachsend und transferpräferenzierend) die Aussage $R_W(X, Y)$ wahr, so ist das geordnete Paar (X, Y) in der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset W}$ enthalten.

Neben dieser globalen Durchschnittsrelation führen wir speziell für paretianische wie utilitaristische Verteilungsmaßstäbe gesonderte Durchschnittsrelationen ein:

Def.: Unter der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset P}$ aller paretianischer Verteilungsmaßstäbe verstehen wir einen Verteilungsmaßstab, der nach der Vorschrift:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : R_{\emptyset P}(X, Y) \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall W : R_W(X, Y) \\ \text{mit } W = S(U_1, \dots, U_n) \end{array} \right.$$

gebildet wird. Die zur Durchschnittsrelation $R_{\emptyset P}$ herangezogenen Funktionen sind also auf die Klasse der paretianischen Wohlfahrtsfunktionen beschränkt.

(1) Siehe dazu Abschnitt 4.3. dieser Arbeit.

Def.: Unter der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset U}$ aller utilitaristischen Verteilungsmaßstäbe verstehen wir einen Verteilungsmaßstab, der nach der Vorschrift:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : R_{\emptyset U}(X, Y) \iff \begin{cases} \forall W : R_W(X, Y) \\ \text{mit } W = \sum_{i=1}^n (A_i + U_i) \frac{1}{n} \end{cases}$$

gebildet wird. Die zur Durchschnittsrelation $R_{\emptyset U}$ herangezogenen Funktionen sind also auf die Klasse der utilitaristischen Wohlfahrtsfunktionen beschränkt.

Welche Beziehungen bestehen nun zwischen den drei normativen Durchschnittsrelation und dem positiven Lorenz-Maßstab? Wir geben dazu den Satz an:

Satz: Für alle Verteilungen $X, Y \in \mathbb{R}_n^+$ mit $M(X) = M(Y)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) $R_{\emptyset W}(X, Y)$, d.h. es gilt $W(X) \geq W(Y)$ für alle beliebigen sozialen Wohlfahrtsfunktionen, falls sie symmetrisch, zumindest schwach monoton wachsend und transferpräferierend sind.
- b) $R_{\emptyset P}(X, Y)$, d.h. es gilt $W(X) \geq W(Y)$ für alle sozialen Wohlfahrtsfunktionen des paretianischen Typs $W = S(U_1, \dots, U_n)$.
- c) $R_{\emptyset U}(X, Y)$, d.h. es gilt $W(X) \geq W(Y)$ für alle sozialen Wohlfahrtsfunktionen des utilitaristischen Typs $W = \sum_{i=1}^n (A_i + U_i) \frac{1}{n}$
- d) $R_L(X, Y)$, d.h. die Lorenzkurve der Verteilung X liegt ganz oder teilweise überhalb der Lorenzkurve der Verteilung Y oder aber ist mit ihr vollständig identisch.

Beweis: wir beweisen die Äquivalenz der Aussagen a) - d)
indem wir die Richtigkeit der folgenden Implika-
tionen nachweisen:

$$R_{\emptyset_N}(Y, X) \Rightarrow R_{\emptyset_P}(Y, X) \Rightarrow R_{\emptyset_U}(Y, X) \Rightarrow R_L(Y, X) \Rightarrow R_{\emptyset_W}(Y, X)$$

Die einzelnen Aussagen durchlaufen also eine zyklische
Anordnung.

" $R_{\emptyset_W}(Y, X) \Rightarrow R_{\emptyset_P}(Y, X)$ ": Die Richtigkeit dieser Implikation
folgt unmittelbar aus der Definition der Relation $R_{\emptyset_W}$:

$$\begin{aligned} R_{\emptyset_W}(Y, X) &\Rightarrow \forall W: W(Y) \geq W(X) \\ &\Rightarrow \forall W: W(Y) \geq W(X) \text{ mit } W = S(U_1, \dots, U_n) \\ &\Rightarrow R_{\emptyset_P}(Y, X) \text{ was zu beweisen war.} \end{aligned}$$

" $R_{\emptyset_P}(Y, X) \Rightarrow R_{\emptyset_U}(Y, X)$ ": Zunächst erhalten wir aus der
Definition der Durchschnittsrelation $R_{\emptyset_P}$ das Resultat:

$$\begin{aligned} R_{\emptyset_P}(Y, X) &\Rightarrow \forall W: W(Y) \geq W(X) \text{ mit } W = S(U_1, \dots, U_n) \\ &\Rightarrow \forall W: W(Y) \geq W(X) \text{ mit } W = \sum_{i=1}^n U_i \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow \forall W: R_W(Y, X) \text{ mit } W = \sum_{i=1}^n U_i \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Da alle utilitaristischen Maßstäbe R_W invariant bezüglich
Transformationen des Ursprungs sind, wird die Aussage (1)
 $R_W(Y, X)$ durch die Hinzufügung additiver Konstanten A_i nicht
berührt, so daß wir folgern können:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall W: R_W(Y, X) \text{ mit } W = \sum_{i=1}^n (A_i + U_i) \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow R_{\emptyset_U}(Y, X) \text{ was zu beweisen war.} \end{aligned}$$

(1) Vgl. dazu Abschnitt 8.1. dieser Arbeit.

" $R_{\emptyset U}(Y, X) \Rightarrow R_L(Y, X)$ ": Wir beweisen die Richtigkeit dieser Behauptung, indem wir aus der gegenteiligen Annahme: "nicht $R_L(Y, X)$ " sei richtig einen Widerspruch zur Voraussetzung " $R_{\emptyset U}(Y, X)$ " herleiten (1).

Wir geben uns zunächst die folgenden n individuellen konkaven Nutzenfunktionen U_i^+ vor mit:

$$U_i^+(x_i) = A_i + \min\{(x_i - z), 0\}$$

$$\text{mit } A_i \geq z \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

Daraus erhalten wir die folgende symmetrische, schwach monoton wachsende und transferpräferierende utilitaristische Wohlfahrtsfunktion W mit:

$$W(X) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{1}{n} + \sum_{x \leq z} (x_{(i)} - z) \frac{1}{n}$$

Aus der Voraussetzung $R_{\emptyset U}(Y, X)$ folgt damit zunächst:

$$\sum_{y \leq z} (y_{(i)} - z) \frac{1}{n} \geq \sum_{x \leq z} (x_{(i)} - z) \frac{1}{n}$$

Wir nehmen nun an, daß "nicht $R_L(Y, X)$ " wahr ist. Daraus folgt, daß mindestens ein Element des Bruttotransfervektors $T = (Y^0 - X^0)V^{-1}$ negativ ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir nun an, daß gerade $t_{(k)}$ das Element des Bruttotransfervektors ist, das negativ ist. Dies impliziert nun, daß $x_{(k)}$ stets größer als $y_{(k)}$ ist,

(1) Die Beweisidee geht auf die Arbeit von M. Rothschild und J.E. Stiglitz zurück:
M. Rothschild und J.E. Stiglitz, Some Further Results on the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 193

$$\text{Aus } t_{(k)} = y_{(k)} - x_{(k)} + \sum_{i=1}^{k-1} (y_{(i)} - x_{(i)}) < 0$$

$$\text{mit } t_{(k-1)} = \sum_{i=1}^{k-1} (y_{(i)} - x_{(i)}) \geq 0 \text{ folgt n\u00e4mlich:}$$

$$x_{(k)} > y_{(k)} + t_{(k-1)} \text{ und damit } x_{(k)} > y_{(k)}$$

Nichts hindert uns, f\u00fcr z gerade den Wert $x_{(k)}$ zu w\u00e4hlen. Dann folgt aus der Voraussetzung " $R_{\emptyset U}(Y, X)$ " die Ungleichung:

$$\sum_{y \leq x_{(k)}} (y_{(i)} - x_{(k)}) \geq \sum_{i=1}^k (x_{(i)} - x_{(k)})$$

Wir nehmen nun an, da\u00df insgesamt $r \geq k$ Elemente der Verteilung Y die Ungleichung $y \leq x_{(k)}$ erf\u00fcllen. Da gleichzeitig " $\text{nicht } R_L(Y, X)$ " gelten soll, was $y_{(k)} < x_{(k)}$ impliziert, kann r niemals kleiner als k werden. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (y_{(i)} - x_{(k)}) + \sum_{i=k+1}^r (y_{(i)} - x_{(k)}) &\geq \sum_{i=1}^k (x_{(i)} - x_{(k)}) \\ \sum_{i=1}^k (y_{(i)} - x_{(i)}) &\geq \sum_{i=k+1}^r (x_{(k)} - y_{(i)}) \end{aligned}$$

Ber\u00fccksichtigen wir, da\u00df $t_{(k)} = \sum_{i=1}^k (y_{(i)} - x_{(i)})$ ist (1),

$$\text{so folgt f\u00fcr } t_{(k)}: t_{(k)} = \sum_{i=k+1}^r (x_{(k)} - y_{(i)}) \geq 0$$

da f\u00fcr alle $r - k$ Elemente aus der Verteilung Y gilt: $y \leq x_{(k)}$!

Das aus der Voraussetzung $R_{\emptyset U}(Y, X)$ folgende Ergebnis $t_{(k)} \geq 0$ steht nun im Widerspruch zu der aus der Behauptung " $\text{nicht } R_L(Y, X)$ " folgenden Annahme $t_{(k)} < 0$. Damit mu\u00df aber die Implikation " $R_{\emptyset U}(Y, X) \Rightarrow R_L(Y, X)$ " richtig sein, was zu beweisen war.

(1) Siehe dazu Abschnitt 6.4. dieser Arbeit.

" $R_L(Y, X) \Rightarrow R_{\emptyset W}(Y, X)$ ": Die Richtigkeit dieser Implikation folgt unmittelbar aus der Äquivalenz des Lorenz-Maßstabs R_L mit dem simultanen Transfer-Maßstab R_{ST} (1):

$$\begin{aligned} R_L(Y, X) &\Rightarrow R_{ST}(Y, X) \\ &\Rightarrow T = (Y^0 - X^0)V^{-1} \geq 0 \\ &\Rightarrow \forall W: W(X^0 + TV) \geq W(X) \\ &\Rightarrow R_{\emptyset W}(Y, X) \end{aligned}$$

womit der Beweis des vorstehenden Satzes abgeschlossen wäre.

Da alle quasikonkaven sozialen Wohlfahrtsfunktionen W transferpräferierend sind (2), können wir mit dem gleichen Beweisverfahren die Richtigkeit des zuerst von Rothschild und Stiglitz aufgestellten Satzes zeigen (3):

Satz: Für alle Verteilungen $X, Y \in \mathbb{R}_n^+$ mit $M(X) = M(Y)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Für alle quasikonkaven Wohlfahrtsfunktionen W gilt: $W(Y) \geq W(X)$.
- b) Für alle paretianischen Wohlfahrtsfunktionen $W = S(U_1, \dots, U_n)$ gilt: $W(Y) \geq W(X)$.
- c) Für alle Wohlfahrtsfunktionen des utilitaristischen Typs: $W = \sum_{i=1}^n U_i \frac{1}{n}$ gilt: $W(Y) \geq W(X)$.

(1) Vgl. dazu Abschnitt 6.4. dieser Arbeit.

(2) Vgl. dazu Abschnitt 7.4. dieser Arbeit.

(3) Vgl. dazu Theorem II in: M. Rothschild und J. E. Stiglitz, Some Further Results in the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 194

folgt: Aus $w(Y) \geq w(X)$ für alle quasikonkaven Wohlfahrtsfunktionen folgt unmittelbar:

$w(Y) \geq w(X)$ für alle paretianischen Wohlfahrtsfunktionen, da sie konkav und damit auch quasikonkav sind. Daraus folgt aber wiederum:

$w(Y) \geq w(X)$ für alle Wohlfahrtsfunktionen des charakteristischen Typs $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \frac{1}{x_i}$, was nach verstehendem Beweis (für $\lambda_i = 0$ für alle i):

$R_1(Y, X)$ zur Folge hat. Dies impliziert aber für alle transferpräferierenden und somit gleichzeitig für alle quasikonkaven Funktionen:

$w(Y) \geq w(X)$, womit der Satz bewiesen wäre.

Da Transferpräferenz, lokale Gleichheitspräferenz und S-Konkavität äquivalente Eigenschaften einer Wohlfahrtsfunktion sind (1), dürfen wir auch behaupten:

Korollar: Für alle Verteilungen $X, Y \in K_n^+$ mit $M(X) = M(Y)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent (2):

- a) Für alle lokal gleichheitspräferierende Wohlfahrtsfunktionen w gilt: $w(Y) \geq w(X)$.
- b) Die Lorenz-Kurve der Verteilung Y liegt ganz oder teilweise überhalb der Lorenz-Kurve der Verteilung X oder aber ist mit ihr vollständig identisch, d.h. es gilt $R_1(Y, X)$.

(1) Vgl. dazu Abschnitt 7.4. dieser Arbeit.

(2) Dieses Ergebnis findet sich auch in Theorem III in: M. Rothschild und J. E. Stiglitz, Some Further Results in the Measurement of Inequality, S.A.O., S. 195

Entsprechend gilt für S-konkave Funktionen:

Korollar: Für alle Verteilungen $X, Y \in R_n^+$ mit $M(X) = M(Y)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent (1):

- a) Für alle S-konkaven Wohlfahrtsfunktionen W gilt: $w(Y) \geq w(X)$.
- b) Die Lorenz-Kurve der Verteilung Y liegt ganz oder teilweise überhalb der Lorenz-Kurve der Verteilung X oder aber ist mit ihr vollständig identisch, d.h. es gilt $R_L(Y, X)$.

Abschließend wollen wir noch Atkinson's Theorem angeben (2):

Korollar: Für alle Verteilungen $X, Y \in R_n^+$ mit $M(X) = M(Y)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- a) Für alle Wohlfahrtsfunktionen des utilitaristischen Typs $W = \sum_{i=1}^n U_i \frac{1}{n}$ gilt: $w(Y) \geq w(X)$.
- b) Die Lorenz-Kurve der Verteilung Y liegt ganz oder teilweise überhalb der Lorenz-Kurve der Verteilung X oder aber ist mit ihr vollständig identisch, d.h. es gilt: $R_L(Y, X)$.

Die Beweise der drei Korollare sind nach den vorstehenden beiden Sätzen evident.

(1) Eine stärkere Version dieses Korollars findet sich in: P. Dasgupta, A.K. Sen und S. Starrett, Notes on the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 183.

Einen Hinweis auf unser Korollar gibt Sen in seinem Buch On Economic Inequality in Fußnote 14 auf Seite 64, a.a.O.

(2) Vgl. A.B. Atkinson, On the Measurement of Inequality, Journal of Economic Theory, Vol. 2, 1970, S. 247

9. Kardinale normative Verteilungsmaße

9.1. Dalton-Index und verallgemeinerter Dalton-Index

Aus den bisher vorgestellten ordinalen wie semikardinalen Wohlfahrtsfunktionen können wir auf der Grundlage der fundamentalen Ungleichung (1):

$$\forall x \in \mathbb{R}_n^+ : w(x_g) \succeq w(x)$$

eine Reihe strikt kardinaler Verteilungsmaße entwickeln, die eine unmittelbare Quantifizierung der Parität bzw. Disparität auf der normativen Basis der zugrunde gelegten Wohlfahrtsfunktion zulassen.

Ein erstes kardinale normatives Verteilungsmaß wurde von Dalton aus dem utilitaristischen Ansatz konstruiert (2):

"Let us assume ... that the economic welfare of different persons is additive, that the relation of income to economic welfare is the same for all members of the community, and that, for each individual, marginal economic welfare diminishes as income increases. Then, if a given income is to be distributed among a given number of persons, it is evident that economic welfare will be a maximum, when all incomes are equal. It follows that the inequality of any given distribution may conveniently be defined as the ratio of the total economic welfare attainable under an equal distribution to the total economic welfare attained under the given distribution. This ratio is equal to unity for an equal distribution, and is greater than unity for all unequal distributions."

Benützen wir, wie in der Literatur üblich (3), den Kehrwert des von Dalton vorgeschlagenen Verhältnisses, so erhalten wir formal:

-
- (1) Siehe dazu Abschnitt 7.1. dieser Arbeit.
 - (2) H. Dalton, The Measurement of the Inequality of Incomes, a.a.O., S. 249
 - (3) Vgl. A.B. Atkinson, On the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 249 oder: R. Bontzel, The Social Significance of Income Distribution Statistics, the Review of Income and Wealth, Series 16, 1970, S. 261 f.

Def.: Gegeben seien n streng konkave Nutzenfunktionen:

$U_i^+(x_i) = A_i + U(x_i)$. Dann heißt das normative kardinale Verteilungsmaß b mit:

$$b(X) = \frac{\sum_{i=1}^n A_i + \sum_{i=1}^n U(x_i)}{\sum_{i=1}^n A_i + nU(m(X))}$$

Dalton-Index oder Dalton-Verteilungsmaß.

Offensichtlich liegen alle Werte von b im Intervall $[0,1]$, wobei speziell $b(X_g) = 1$ ist, d.h. der Dalton-Index ist als Paritätsmaß aufzufassen. Da die zugrundegelegte utilitaristische Wohlfahrtsfunktion $w(X) = \sum_{i=1}^n (A_i + U(x_i)) \frac{1}{n}$

symmetrisch in X ist, ist auch b in X symmetrisch, d.h. für alle beliebigen Permutationsmatrizen Π ist $b(X) = b(X\Pi)$. Ferner ist b von den Absolutgliedern A_i abhängig, d.h. der Dalton-Index ist nicht invariant bezüglich Ursprungsänderungen der individuellen Nutzenfunktionen U_i^+ , wie schon Atkinson kritisch vermerkt (1).

Stört uns der enge utilitaristische Rahmen dieses Maßes, so können wir einen verallgemeinerten Dalton-Index definieren, der erstmalig von Aigner und Heins vorgeschlagen wurde (2):

Def.: Für eine beliebige soziale Wohlfahrtsfunktion w heißt das normative kardinale Verteilungsmaß B mit:

$$B(X) = \frac{w(X)}{w(X_g)}$$

verallgemeinerter Dalton-Index.

Aus der Symmetrie von w folgt unmittelbar die Symmetrie von B . Ferner ist B auf Werte im Intervall $[0,1]$ beschränkt mit $B(X_g) = 1$. Schließlich geht B für alle utilitaristischen Wohlfahrtsfunktionen in den Dalton-Index b über.

(1) Vgl. A.B. Atkinson, On the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 249 f.

(2) Vgl. D.J.Aigner und A.J.Heins, A Social Welfare View of the Measurement of Income Equality, a.a.O., S. 13 ff

9.2. Atkinson-Index und Sen-Index

Anstatt das aggregierte Nutzenniveau einer Verteilung X in Beziehung zu demjenigen Nutzenniveau zu setzen, das sich bei einer Gleichverteilung der Merkmalssumme $M(X)$ ergeben würde, können wir auch direkt $M(X)$ mit demjenigen Merkmalsbetrag vergleichen, der gleichverteilt gerade das aggregierte Nutzenniveau der Ausgangsverteilung X hervorbrachte (1). Dieser Gedankengang führt zunächst zu Atkinson's Konzept des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung (equally distributed equivalent level of income) (2):

Def.: Gegeben seien n konkave, strikt monoton wachsende Nutzenfunktionen $U_i^+(x_i) = A_i + U(x_i)$. Dann erfüllt das Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung y^f die Gleichung:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+: \sum_{i=1}^n U_i^+(y^f(X)) \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n U_i^+(x_i) \frac{1}{n}$$

Bei Gleichverteilung der Merkmalssumme $ny^f(X)$ ist das daraus resultierende Wohlfahrtsniveau mit dem der Ausgangsverteilung identisch.

Aus dieser Definition erhalten wir unmittelbar die folgende Darstellung für y^f :

$$\sum_{i=1}^n A_i + nU(y^f(X)) = \sum_{i=1}^n A_i + \sum_{i=1}^n U(x_i)$$

$$\text{woraus: } U(y^f(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n U(x_i)$$

resultiert. Offensichtlich ist $y^f(X)$ von den Absolutgliedern A_i unabhängig, d.h. das Äquivalenzeinkommen bei

(1) Vgl. A.A.Sen, Ethical Measurement of Inequality: Some Difficulties, in: Personal Income Distribution, Hrsg. M.Krelle und A.F. Shorrocks, North-Holland Publishing Company, Amsterdam usw., 1978, S. 82

(2) Vgl. A.B. Atkinson, On the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 250

Gleichverteilung ist invariant bezüglich Ursprungsänderungen der individuellen Nutzenfunktionen U_i^+ . Da diese strikt monoton wachsend und damit auch eindeutig umkehrbar sind, erhalten wir unter Verwendung der Umkehrfunktion U^{-1} die folgende explizite Darstellung von $y^f(X)$:

$$y^f(X) = U^{-1}\left(\sum_{i=1}^n U(x_i) \frac{1}{n}\right)$$

Der Wertebereich des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung ist mit dem Intervall $[0, m(X)]$ identisch, wie die nachfolgende kleine Überlegung zeigt: Zunächst gilt für alle utilitaristischen Wohlfahrtsfunktionen:

$$\sum_{i=1}^n U(m(X)) \frac{1}{n} \geq \sum_{i=1}^n U(x_i) \frac{1}{n} \geq \sum_{i=1}^n U(0) \frac{1}{n}$$

Unter Benützung der Definition von y^f folgt daraus:

$$U(m(X)) \geq U(y^f(X)) \geq U(0)$$

Wenden wir darauf die Inverse U^{-1} an, so erhalten wir:

$$m(X) \geq y^f(X) \geq 0$$

was zu beweisen war. Nach diesen Vorarbeiten können wir nun den Atkinson-Index definieren (1):

Def.: Gegeben seien n konkave, strikt monoton wachsende Nutzenfunktionen $U_i^+(x_i) = A_i + U(x_i)$. Dann heißt das normative kardinale Verteilungsmaß c mit:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+: c(X) = 1 - m(X)^{-1} y^f(X)$$

$$\text{und: } y^f(X) = U^{-1}\left(\sum_{i=1}^n U(x_i) \frac{1}{n}\right)$$

Atkinson-Index oder Atkinson-Verteilungsmaß.

(1) Vgl. A.B. Atkinson, On the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 250

Zu einer weiterführenden Kritik dieses Meßkonzeptes siehe: M.G. Allingham, The Measurement of Inequality, Journal of Economic Theory, Vol. 5, 1972, S. 163-169

Aus dieser Definition erhalten wir die folgende äquivalente Darstellung des Atkinson-Verteilungsmaßes:

$$c(X) = 1 - M(X)^{-1} n y^f(X)$$

Multiplizieren wir $c(X)$ mit 100, so gibt $c(X)100$ an, um wieviel Prozent die absolute Merkmalssumme $M(X)$ der Verteilung X verringert werden kann, wenn sie gleichverteilt wird und das aggregierte Nutzenniveau der Ausgangsverteilung X beibehalten werden soll. Entsprechend zeigt uns $(1-c(X))100$ an, wieviel Prozent der ursprünglichen Merkmalssumme $M(X)$ verbraucht werden, um bei Gleichverteilung gerade den Pro-Kopf-Nutzen der Ausgangsverteilung X zu erhalten. Atkinson schreibt (1):

"If $c(X) = 0,3$, for example, it allows us to say that if incomes were equally distributed, then we should need only 70% of the present national income to achieve the same level of social welfare (according to the particular social welfare function)."

Offensichtlich legen alle Werte des Atkinson-Index im Intervall $[0,1]$, wobei für die Gleichverteilung $c(X_g) = 0$ gilt, d.h. wir dürfen c als Disparitätsmaß auffassen.

Da für alle Permutationsmatrizen Π das Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung $y^f(X)$ invariant bleibt, d.h. es gilt: $\forall X$ und $\forall \Pi: y^f(X\Pi) = y^f(X) = U^{-1}(\sum_{i=1}^n U(x_i) \frac{1}{n})$ ist das Atkinson-Maß als lineare Transformation aus $y^f(X)$ ebenfalls invariant bezüglich beliebiger Permutationsmatrizen Π und damit symmetrisch. Aus der Unabhängigkeit von $y^f(X)$ bezüglich der Besatzglieder A_1 folgt schließlich die Invarianz von c bezüglich aller Ursprungsänderungen der individuellen Nutzenfunktion U_1^+ .

(1) A.B. Atkinson, on the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 270, Ungleichung in der Terminologie der Verfasser.

Wiederum bewegt sich der Atkinson-Index wie der Dalton-Index im streng utilitaristischen Weltbild. Eine Verallgemeinerung können wir nach Sen vornehmen (1). Dazu definieren wir zunächst das verallgemeinerte Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung (generalized equally distributed equivalent income):

Def.: Gegeben sei eine beliebige soziale Wohlfahrtsfunktion W , die in X strikt monoton wachsend ist. Dann erfüllt das verallgemeinerte Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung y^F die Gleichung:

$$\forall x \in \mathbb{R}_n^+ : W(y^F(x), \dots, y^F(x)) = W(x)$$

Die Interpretation bleibt dabei völlig gleich: wird das verallgemeinerte Äquivalenzeinkommen $y^F(x)$ von jedermann bezogen, so entspricht das daraus resultierende Wohlfahrtsniveau gerade dem der Ausgangsverteilung x .

Im Fall homothetischer Wohlfahrtsfunktionen können wir aus der obigen Definitionsgleichung eine explizite Lösung für $y^F(x)$ gewinnen:

Zunächst folgt aus der Definition homothetischer Wohlfahrtsfunktionen (2) die Schreibweise:

$$H \left[\overset{\circ}{W}(y^F(x), \dots, y^F(x)) \right] = H \left(\overset{\circ}{W}(x) \right)$$

Unter Anwendung der Inversen H^{-1} erhalten wir sofort:

$$\overset{\circ}{W}(y^F(x), \dots, y^F(x)) = \overset{\circ}{W}(x)$$

woraus unter Berücksichtigung der linearen Homogenität der Wohlfahrtsfunktion $\overset{\circ}{W}$ endgültig die Lösung:

$$y^F(x) = \overset{\circ}{W}(1, 1, \dots, 1)^{-1} \overset{\circ}{W}(x)$$

folgt, was gezeigt werden sollte.

(1) Vgl. A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 42

(2) Vgl. Abschnitt 7.1. dieser Arbeit.

Auch das verallgemeinerte Äquivalenzeinkommen $y^F(X)$ ist auf das Intervall $[0, m(X)]$ normiert: Aus der Ungleichung:

$$W(m(X), \dots, m(X)) \geq W(x_1, \dots, x_n) \geq W(0, \dots, 0)$$

folgt unter Benützung der Definition von $y^F(X)$:

$$W(m(X)(1, \dots, 1)) \geq W(y^F(X)(1, \dots, 1)) \geq W(0 \cdot (1, \dots, 1))$$

was $m(X) \geq y^F(X) \geq 0$ impliziert, da W voraussetzungs- gemäß in X strikt monoton wachsend ist.

Def.: Gegeben sei eine beliebige soziale Wohlfahrtsfunktion, die in X strikt monoton wachsend ist. Dann heißt das normative kardinale Maß C mit:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : C(X) = 1 - m(X)^{-1} y^F(X)$$

$$\text{und: } W(y^F(X), \dots, y^F(X)) = W(X)$$

Sen-Index oder Sen-Verteilungsmaß (1).

$(1-C(X))100$ zeigt uns an, wieviel Prozent der ursprünglichen Merkmalssumme $M(X)$ gebraucht werden, um bei Gleichverteilung gerade das Wohlfahrtsniveau $W(X)$ der Ausgangsverteilung X zu erhalten.

Offensichtlich ist $C(X)$ auf das Intervall $[0, 1]$ normiert mit $C(X_g) = 0$, d.h. auch der Sen-Index ist als Disparitätsmaß zu interpretieren. Aus der Symmetrie von W folgt weiterhin die Invarianz von $y^F(X)$ bezüglich aller Permutationsmatrizen Π , was unmittelbar die Symmetrie von $C(X)$ impliziert, d.h. es gilt $C(X) = C(X\Pi)$. Schließlich geht $C(X)$ für alle utilitaristischen Wohlfahrtsfunktionen in den Atkinson-Index $c(X)$ über, da in diesem Fall $y^F(X)$ gerade dem Äquivalenzeinkommen $y^F(X)$ entspricht.

(1) Vgl. A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 42

9.3. Der Kolm-Index

Ein mit dem Atkinson-Index $c(X)$ verwandtes Maß wurde 1976 von Kolm vorgeschlagen (1):

Def.: Gegeben seien n konkave, strikt monoton wachsende Nutzenfunktionen $U_i^+(x_i) = A_i + U(x_i)$. Dann heißt das normative kardinale Verteilungsmaß k mit:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+: \quad k(X) = m(X) - y^f(X)$$

Kolm-Index oder auch Kolm-Verteilungsmaß, wobei

$$y^f(X) = U^{-1}\left(\sum_{i=1}^n U(x_i) \frac{1}{n}\right)$$

gilt.

Der Kolm-Index beruht also direkt auf dem Vergleich von Durchschnittseinkommen und Äquivalenzeinkommen (2):

"More precisely, y^f is in some sense average welfare per person measured in pounds sterling. $m(X)$ is average income per person. y^f differs from $m(X)$ because all x_i 's are not equal. Therefore, $k(X)$ can be taken as a 'per person' pound measure of inequality."

Die Eigenschaften des Kolm-Index folgen direkt aus den Eigenschaften des Atkinson-Index: Für den Wertebereich erhalten wir das Intervall $[0, m(X)]$, wobei offensichtlich $k(X_g) = 0$ gilt, d.h. k ist als Disparitätsmaß aufzufassen. Weiterhin ist k symmetrisch, d.h. für alle X und Π gilt: $k(X) = k(\Pi)$. Schließlich folgt aus der Unabhängigkeit von y^f bezüglich der Absolutglieder A_i die Invarianz von k bezüglich aller Ursprungsänderungen der individuellen Nutzenfunktionen U_i^+ .

-
- (1) Vgl. S.-C.Kolm, Unequal Inequalities I, a.a.O., S. 437 f. und: C.Blackorby und D.Donaldson, A Theoretical Treatment of Indices of Absolute Inequality, International Economic Review, Vol. 21, 1980, S. 123
- (2) S.-C.Kolm, Unequal Inequalities I, a.a.O., S. 438 Angleichung an die Terminologie der Verfasser.

9.4. Die Beziehungen zwischen kardinalen normativen Verteilungsmaßen

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf die Klasse aller strikt monoton wachsenden Wohlfahrtsfunktionen. Unter dieser Voraussetzung behaupten wir für den Dalton- und Atkinson-Index:

Satz: Der Dalton-Index läßt sich als eine umkehrbar eindeutige Funktion des Atkinson-Index darstellen.

Beweis: Aus der Definition des Äquivalenzeinkommens:

$$U(y^f(X)) = \sum_{i=1}^n U(x_i) \frac{1}{n}$$

folgt, daß wir für b die Ausdrucksweise:

$$b(X) = \frac{\sum_{i=1}^n A_i + nU(y^f(X))}{\sum_{i=1}^n A_i + nU(m(X))}$$

verwenden können. Ferner erhalten wir aus der Definition des Atkinson-Index den Zusammenhang:

$$y^f(X) = m(X)(1-c(X))$$

Setzen wir diesen Ausdruck in $b(X)$ ein, so folgt:

$$b(X) = \frac{\sum_{i=1}^n A_i + nU(m(X)(1-c(X)))}{\sum_{i=1}^n A_i + nU(m(X))}$$

bzw. für den Spezialfall $A_i = 0$ für alle i :

$$b(X) = U(m(X))^{-1} U(m(X)(1-c(X)))$$

d.h. der Dalton-Index kann als eine Transformation des Atkinson-Index aufgefaßt werden.

Diese Transformation läßt sich eindeutig umkehren.
Zunächst erhalten wir aus dem vorstehenden Ergebnis:

$$U[m(X)(1-c(X))] = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n A_i + nU(m(X)) \right] b(X) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i$$

Da die Nutzenfunktion U eindeutig umkehrbar ist, folgt:

$$c(X) = 1 - m(X)^{-1} U^{-1} \left\{ \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i + U(m(X)) \right] b(X) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \right\}$$

d.h. wir können umgekehrt den Atkinson-Index als einen transformierten Dalton-Index begreifen. Durch diese Transformation wird zum einen das Dalton-Paritätsmaß in ein Disparitätsmaß umgewandelt, zum anderen der Einfluß der Absolutglieder A_i eliminiert. Die Richtigkeit der letzten Aussage folgt unmittelbar aus:

$$\begin{aligned} & U^{-1} \left\{ \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i + U(m(X)) \right] b(X) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \right\} \\ &= U^{-1} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i + U(y^f(X)) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \right] \\ &= U^{-1} [U(y^f(X))] = y^f(X) \end{aligned}$$

was invariant bezüglich aller Ursprungsänderungen ist.

Aus diesem Ergebnis folgt die elegantere Schreibweise für $c(X)$ mit (1):

$$c(X) = 1 - m(X)^{-1} U^{-1} [U(m(X)) b'(X)]$$

wobei wir $b'(X) = \frac{\sum_{i=1}^n U(x_i)}{nU(m(X))}$ verwendet haben.

(1) Dieses Ergebnis findet sich auch bei: R. Bürk und W. Gehrig, Indices of Income Inequality and Societal Income. An Axiomatic Approach, a.a.O., S. 325

Da der Kolm-Index k zum Atkinson-Index c direkt proportional mit dem Proportionalitätsfaktor $m(X)$ ist, d.h.:

$$k(X) = m(X)c(X)$$

so können wir aus den vorstehenden Ergebnissen schließen:

Korollar: Der Dalton-Index läßt sich als eine umkehrbar eindeutige Funktion des Kolm-Index darstellen.

Wir erhalten nämlich unmittelbar aus $c(X) = \frac{k(X)}{m(X)}$ unter Benützung der vorangegangenen Ableitungen:

$$b(X) = \frac{\sum_{i=1}^n A_i + nU(m(X) - k(X))}{\sum_{i=1}^n A_i + nU(m(X))}$$

bzw. falls alle A_i den Wert Null annehmen:

$$b(X) = U(m(X))^{-1}U(m(X) - k(X))$$

Entsprechend folgern wir für die Inversen:

$$k(X) = m(X) - U^{-1} \left\{ \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i + U(m(X)) \right] b(X) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \right\}$$

bzw. für den Spezialfall $b^*(X) = \frac{\sum_{i=1}^n U(x_i)}{nU(m(X))}$:

$$k(X) = m(X) - U^{-1} [U(m(X))b^*(X)]$$

Wiederum wird durch diese Transformation das Dalton-Paritätsmaß in ein Disparitätsmaß umgewandelt, wobei der Einfluß der Absolutglieder A_i verlorengeht.

Ähnliche Zusammenhänge gelten zwischen dem verallgemeinerten Dalton-Index und dem Sen-Index. Wir behaupten:

Satz: Für jede beliebige soziale Wohlfahrtsfunktion ist der verallgemeinerte Dalton-Index eine Funktion des Sen-Index. Ist die soziale Wohlfahrtsfunktion homothetisch, so ist diese Funktion eindeutig umkehrbar.

Beweis: Aus der Definition des verallgemeinerten Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung:

$$w(y^F(X), \dots, y^F(X)) = w(X)$$

folgt, daß wir für den verallgemeinerten Dalton-Index $B(X)$ die Schreibweise:

$$B(X) = \frac{w(y^F(X), \dots, y^F(X))}{w(X_g)} \quad \text{verwenden können.}$$

$$\text{Zudem folgt aus } C(X) = 1 - m(X)^{-1} y^F(X)$$

$$\text{die Beziehung: } y^F(X) = m(X)(1-C(X))$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Bestimmungsgleichung des verallgemeinerten Dalton-Index ein, so impliziert dies:

$$B(X) = w(X_g)^{-1} w[m(X)(1-C(X)), \dots, m(X)(1-C(X))]$$

oder aber in verkürzter Form:

$$B(X) = w(X_g)^{-1} w[(1-C(X))X_g]$$

d.h. der verallgemeinerte Dalton-Index läßt sich als Transformation des Sen-Index darstellen. Für den Spezialfall homothetischer Wohlfahrtsfunktionen können wir auch die Umkehrfunktion explizit angeben:

Zunächst folgt aus der Eigenschaft der Homothetie, daß

$$B(X) = W(X_g)^{-1} H^0 \left\{ W \left[(1-C(X)) X_g \right] \right\}$$

geschrieben werden kann, woraus unter Ausnutzung der linearen Homogenität der Wohlfahrtsfunktion W^0 folgt:

$$B(X) W(X_g) = H \left[(1-C(X)) W(X_g) \right]$$

Da die Funktion H strikt monoton wachsend ist, so resultiert unter Verwendung der Umkehrfunktion H^{-1} :

$$(1-C(X)) W(X_g) = H^{-1}(B(X) W(X_g)) \quad \text{oder aber:}$$

$$C(X) = 1 - H^{-1}(W(X_g))^{-1} H^{-1}(W(X_g) B(X))$$

Berücksichtigen wir, daß $H^{-1}(W) = W^0$ gilt, so erhalten wir die endgültige Schreibweise für $C(X)$:

$$C(X) = 1 - W(X_g)^{-1} H^{-1}(W(X_g) B(X))$$

was zu beweisen war. Der Sen-Index ist also als ein in ein Disparitätsmaß transformierter verallgemeinerter Dalton-Index zu interpretieren, falls die zugrundegelegte soziale Wohlfahrtsfunktion homothetisch ist. abschließend geben wir das Lemma an:

Lemma: Ist die soziale Wohlfahrtsfunktion linear homogen, so gilt zwischen dem Sen-Index und dem verallgemeinerten Dalton-Index die Beziehung: $C(X) = 1 - B(X)$.

Beweis: Ist W linear homogen, so ist die Funktion h gerade die identische Abbildung. Dann folgt:

$$C(X) = 1 - W(X_g)^{-1} W(X_g) B(X) \quad \text{und damit:}$$

$$C(X) = 1 - B(X)$$

womit das Lemma bewiesen wäre.

10. Ausgewählte parametrisch spezifizierte Repräsentationen kardinaler, normativer Verteilungsmaße

10.1. Atkinson-Index und isoelastische Nutzenfunktionen

Je nach der spezifischen Gestalt der verwendeten individuellen Nutzenfunktionen erhalten wir verschiedene Ausprägungen des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung. Beschränken wir uns auf den Fall isoelastischer Nutzenfunktionen, so können wir die Behauptung aufstellen:

Satz: Das Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung mit:

$$y^f(X) = U^{-1}\left(\sum_{i=1}^n U(x_i) \frac{1}{n}\right)$$

nimmt genau dann die Gestalt:

$$y_e^f(X) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{1-e} \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1-e}} & \text{für } e \geq 0 \\ & \text{und } e \neq 1 \\ \left[\prod_{i=1}^n x_i\right]^{\frac{1}{n}} & \text{für } e = 1 \end{cases}$$

an, wenn die konkaven individuellen Nutzenfunktionen $U_i^+(x_i) = A_i + U(x_i)$ isoelastisch sind, d.h. die Elastizität des Grenznutzens e mit:

$$e = - \frac{dU^+(x_i)}{dx_i} \frac{x_i}{U^+(x_i)}$$

ist für alle $x_i \in \mathbb{R}_1^+$ konstant und nichtnegativ (1).

- (1) Eine ebenfalls notwendige wie hinreichende Bedingung wäre die Forderung, daß y^f linear-homogen in X wäre. Der keineswegs triviale Beweis der Suffizienz beruht auf dem Gedanken, daß in diesem Fall y^f eine linear-homogene quasilineare Funktion in X ist, woraus die von uns angegebenen Ausdrücke für y^f resultieren. Der Beweis für allgemein linear-homogene quasilineare Funktionen findet sich in:

W. Eichhorn, Functional Equations in Economics, a.a.O., S. 32 ff.

Beweis: Für den Beweis der Suffizienz gehen wir zunächst von der Definition der Elastizität e aus, die auch die Elastizität der linear transformierten Nutzenfunktionen U_i^+ ist:

$$-e \frac{1}{x_i} = \frac{U_i^{+'}(x_i)}{U_i^{+'}(x_i)}$$

Durch beidseitige Integration, wobei wir die Integrationskonstanten vernachlässigen, da sich alle individuellen Grenznutzenfunktionen $U_i^+ = U'$ gleichen müssen, erhalten wir:

$$-e \int d \ln x_i = \int d \ln U_i^{+'}(x_i)$$

oder aber nach algebraischer Umformung:

$$U_i^{+'}(x_i) = x_i^{-e}$$

Für den Spezialfall $e = 1$ folgt daraus durch nochmalige beidseitige Integration die logarithmische Nutzenfunktion:

$$U_i^+(x_i) = A_i + \ln x_i$$

Für alle anderen $e > 0$ ergeben sich ebenfalls durch beidseitige Integration die individuellen Nutzenfunktionen:

$$U_i^+(x_i) = A_i + U_e(x_i)$$

$$\text{mit } U_e(x_i) = (1-e)^{-1} x_i^{1-e}$$

die offensichtlich eine Funktion der Elastizität des Grenznutzens e sind (1).

(1) Siehe dazu auch: P.J.Hammond, A Note on Extreme Inequality Aversion, Journal of Economic Theory, Vol.11, 1975, S. 465

Aus der Definition des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung:

$$y^f(X) = U^{-1}\left(\sum_{i=1}^n U(x_i) \frac{1}{n}\right)$$

erhalten wir dann zunächst für $U(x_i) = \ln x_i$:

$$\begin{aligned} y_1^f(X) &= \exp\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i \frac{1}{n}\right) \\ &= \left[\prod_{i=1}^n \exp\left(\ln x_i \frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \left[\prod_{i=1}^n x_i \frac{1}{n}\right] \end{aligned}$$

Für alle anderen $e > 0$ mit $U_e(x_i) = (1-e)^{-1} x_i^{1-e}$ folgt entsprechend:

$$\begin{aligned} y_e^f(X) &= \left((1-e) \sum_{i=1}^n (1-e)^{-1} x_i \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1-e}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^{1-e} \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1-e}} \end{aligned}$$

was zu beweisen war. Mit dem Index e kennzeichnen wir, daß wir y^f nun als Funktion des Parameters e auffassen.

Der Beweis der Notwendigkeit erübrigt sich, da wir lediglich die gemachten Operationen umzukehren brauchen.

Weiterhin können wir die Grenzfälle: $e \rightarrow 0$ und $e \rightarrow +\infty$ betrachten. Zunächst erhalten wir für: $e \rightarrow 0$:

$$\lim_{e \rightarrow 0} y_e^f(X) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} = m(X)$$

In diesem Grenzfall reagiert das Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung nur noch auf Variationen des Durchschnittseinkommens $m(X)$.

Für den zweiten Grenzfall folgt zunächst aus der Symmetrie von y^f die Darstellung:

$$y_e^f(X) = \left(\sum_{i=1}^n x_{(i)}^{1-e} \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{1-e}}$$

was äquivalent mit der Schreibweise:

$$y_e^f(X) = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_{(i)}} \right)^{e-1} \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{e-1}}}$$

ist. Wir nehmen nun an, daß insgesamt r Komponenten ($r \geq 1$) des Vektors X mit $x_{(1)}$ übereinstimmen, d.h. $x_{(1)} = \dots = x_{(r)}$ und $x_{(1)} < x_{(r+1)}$. Dann können wir y_e^f darstellen mit:

$$y_e^f(X) = \frac{1}{\left[\frac{r}{n} \left(\frac{1}{x_{(1)}} \right)^{e-1} + \sum_{i=r+1}^n \left(\frac{1}{x_{(i)}} \right)^{e-1} \right] \frac{1}{n} \frac{1}{e-1}}$$

Erweitern wir Zähler und Nenner mit $x_{(1)}$, so folgt:

$$y_e^f(X) = \frac{x_{(1)}}{\left[\frac{r}{n} + \sum_{i=r+1}^n \left(\frac{x_{(1)}}{x_{(i)}} \right)^{e-1} \frac{1}{n} \right] \frac{1}{e-1}}$$

Nun ist $\lim_{e \rightarrow +\infty} \left(\frac{r}{n} \right)^{\frac{1}{e-1}} = 1$ und $\lim_{e \rightarrow +\infty} \sum_{i=r+1}^n \left(\frac{x_{(1)}}{x_{(i)}} \right)^{e-1} = 0$

so daß wir für den gesuchten Grenzwert erhalten:

$$\lim_{e \rightarrow +\infty} y_e^f(X) = \lim_{e \rightarrow +\infty} \frac{x_{(1)}}{\left[\frac{r}{n} + \sum_{i=r+1}^n \left(\frac{x_{(1)}}{x_{(i)}} \right)^{e-1} \frac{1}{n} \right] \frac{1}{e-1}} = x_{(1)}$$

oder aber $\lim_{e \rightarrow +\infty} y_e^f(X) = \min_i \{x_i\}$, d.h. das Äquivalenzeinkommen ist identisch mit dem Minimumeinkommen der Verteilung(1).

(1) Dieses Ergebnis findet sich ohne Beweis bei P.J.Hammond, A Note on Extreme Inequality Aversion, a.a.O., S. 465. Wir verwenden zum Beweis eine für CES-Funktionen entwickelte Beweisidee von C.M.Ferguson, The Neoclassical Theory of Production and Distribution, a.a.O., S. 107.

Aus den vorstehenden Ergebnissen für das Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung erhalten wir damit die von Atkinson selbst vorgeschlagene Formel für $c(1)$:

Korollar: Der Atkinson-Index c mit:

$$c(X) = 1 - m(X)^{-1} y^f(X)$$

hat genau dann die Gestalt:

$$c_e(X) = \begin{cases} 1 - \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{m(X)} \right)^{1-e} \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{1-e}} & \text{für } e > 0 \\ & \text{und } e \neq 1 \\ 1 - \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{m(X)} \right)^{\frac{1}{n}} \right]^{\frac{1}{n}} & \text{für } e = 1 \end{cases}$$

wenn die konkaven individuellen Nutzenfunktionen isoelastisch sind.

Für die Grenzfälle $e \rightarrow 0$ und $e \rightarrow +\infty$ erhalten wir speziell(2):

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow 0} c_e(X) &= 1 - m(X)^{-1} \lim_{e \rightarrow 0} y_e^f(X) \\ &= 1 - m(X)^{-1} m(X) = 0 \end{aligned}$$

d.h. der Atkinson-Index nimmt für $e \rightarrow 0$ stets den trivialen Wert Null an und kann somit als "pathologisches" Disparitätsmaß aufgefaßt werden.

$$\begin{aligned} \lim_{e \rightarrow +\infty} c_e(X) &= 1 - m(X)^{-1} \lim_{e \rightarrow +\infty} y_e^f(X) \\ &= 1 - m(X)^{-1} x_{(1)} \end{aligned}$$

In diesem Fall zeigt uns $\lim_{e \rightarrow +\infty} c_e(X)$ mit 100 multipliziert an, um wieviel Prozent die absolute Merkmalssumme $M(X)$ verringert werden kann, wenn alle Bezieher gerade das Minimumeinkommen $x_{(1)}$ beziehen.

(1) Vgl. A.B. Atkinson, On the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 257

(2) Vgl. S.-C. Kolm, Unequal Inequalities I, a.a.O., S. 418

Der Parameter e unterliegt weiteren interessanten Interpretationen. Dazu berechnen wir die erste partielle Ableitung des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung nach $x_{(k)}$. Aus der Definition von y_e^f erhalten wir zunächst:

$$y_e^f(X^0)^{1-e} = \sum_{i=1}^n x_{(i)}^{1-e} \frac{1}{n}$$

Durch beidseitiges Differenzieren nach $x_{(k)}$ folgt:

$$(1-e)y_e^f(X^0)^{-e} y_{e(k)}^{f'}(X^0) = (1-e)x_{(k)}^{-e} \frac{1}{n}$$

oder aber nach algebraischer Umformung:

$$y_{e(k)}^{f'}(X^0) = y_e^f(X^0)^e x_{(k)}^{-e} \frac{1}{n}$$

Nach dieser Vorarbeit bilden wir nun das totale Differential von y_e^f bei einer marginalen Änderung von $x_{(k-h)}$ und $x_{(k)}$ ($h \geq 1$):

$$dy_e^f(X^0) = y_{e(k-h)}^{f'}(X^0)dx_{(k-h)} + y_{e(k)}^{f'}(X^0)dx_{(k)}$$

Fragen wir nach denjenigen Einkommensänderungen, bei denen sich y_e^f nicht ändert, so erhalten wir die marginale Substitutionsrate oder Transferrate (1) zwischen den Einkommen $x_{(k-h)}$ und $x_{(k)}$:

$$-\frac{dx_{(k-h)}}{dx_{(k)}} = \frac{y_{e(k)}^{f'}(X^0)}{y_{e(k-h)}^{f'}(X^0)} = \left(\frac{x_{(k-h)}}{x_{(k)}}\right)^e$$

(1) Wir können die Differentiale $dx_{(k-h)}$ und $dx_{(k)}$ als Transfers interpretieren. Siehe dazu auch Abschnitt 7.1.

Da $x_{(k-h)}$ für alle $h \geq 1$ kleiner oder gleich $x_{(k)}$ ist, ist die marginale Substitutionsrate zwischen den Einkommen $x_{(k-h)}$ und $x_{(k)}$ stets kleiner oder gleich Eins.

Für die Spezialfälle $e \rightarrow 0$ und $e \rightarrow \infty$ erhalten wir (1):

$$\lim_{e \rightarrow 0} \frac{y_{e(k)}^{f, (X^0)}}{y_{e(k-h)}^{f, (X^0)}} = 1 \quad (x_{(k-h)} \neq 0)$$

d.h. unabhängig von den Einkommen $x_{(k-h)}$ und $x_{(k)}$ ist die marginale Substitutionsrate stets Eins.

$$\lim_{e \rightarrow \infty} \frac{y_{e(k)}^{f, (X^0)}}{y_{e(k-h)}^{f, (X^0)}} = 0 \quad \text{falls } x_{(k-h)} < x_{(k)}$$

d.h. die marginale Substitutionsrate beträgt Null solange die Einkommen $x_{(k-h)}$ und $x_{(k)}$ unterschiedlich sind.

Schließlich folgt für $e = 1$:

$$\frac{y_1^{f, (X^0)}(k)}{y_1^{f, (X^0)}(k-h)} = \frac{x_{(k-h)}}{x_{(k)}}$$

d.h. die marginale Substitutionsrate ist in $x_{(k-h)}/x_{(k)}$ linear.

Fassen wir nun bei gegebenem Parameter e die marginale Substitutionsrate als Funktion des Quotienten $x_{(k-h)}/x_{(k)}$ auf, so können wir ihre Sensitivität in bezug auf Änderungen dieses Quotienten untersuchen:

(1) Vgl. dazu: R.Bürk und W.Gehrig, Indices of Income Inequality and Societal Income. An Axiomatic Approach, a.a.O., S. 328

Wir bilden dazu die erste Ableitung nach $x_{(k-h)}/x_{(k)}$:

$$-\frac{d\left(\frac{dx_{(k-h)}}{dx_{(k)}}\right)}{d\left(\frac{x_{(k-h)}}{x_{(k)}}\right)} = e\left(\frac{x_{(k-h)}}{x_{(k)}}\right)e^{-1}$$

Dieser Ausdruck ist für alle $e > 0$ stets positiv. Für die zweite Ableitung erhalten wir:

$$-\frac{d^2\left(\frac{dx_{(k-h)}}{dx_{(k)}}\right)}{d\left(\frac{x_{(k-h)}}{x_{(k)}}\right)^2} = e(e-1)\left(\frac{x_{(k-h)}}{x_{(k)}}\right)e^{-2}$$

Hier müssen wir eine Fallunterscheidung vornehmen: Für alle e aus dem Intervall $(0,1)$ ist die errechnete zweite Ableitung stets negativ, für alle anderen $e > 1$ stets positiv. Im ersten Fall ist damit die marginale Transferrate eine strikt konkave Funktion des Quotienten $x_{(k-h)}/x_{(k)}$, im zweiten Fall dagegen eine strikt konvexe. Berücksichtigen wir, daß das $(0,1)$ -Intervall sowohl Definitions- wie Wertebereich darstellt, so erhalten wir das folgende Bild:

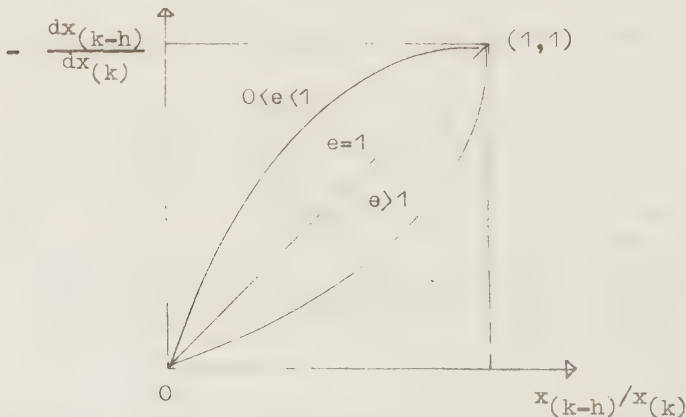


Abb. 2: Marginale Transferrate. Quelle: R. Bürk und W. Gehrig, Indices of Income Inequality and Societal Income. An Axiomatic Approach, a.a.O., S. 328

Wir können uns damit der Auffassung von Bürk und Gehrig anschließen (1):

"We see that for $0 < e < 1$ the transfer rate is sensitive to whether income levels are very different, in the case $e > 1$ it tends to be sensitive to whether income levels are different at all. In the extreme we have for $e = 0$ a transfer rate totally independent of income levels and for $e \rightarrow +\infty$ the transfer rate is zero if only income levels are slightly different.

Hence what is important in the case $e \rightarrow +\infty$ is the ordinal ranking of income levels and not the cardinal difference."

Wir dürfen also den Parameter e als Maß für die Ordinalität des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung und damit auch des Atkinson-Index c interpretieren.

Schließlich entspricht $\frac{1}{e}$ der Substitutionselastizität σ mit:

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{x_{(k-h)}}{x_{(k)}}\right)}{d\left(\frac{dx_{(k-h)}}{dx_{(k)}}\right)} \cdot \frac{\frac{dx_{(k-h)}}{dx_{(k)}}}{\frac{x_{(k-h)}}{x_{(k)}}}$$

Aus dieser Definition erhalten wir nämlich unmittelbar:

$$\sigma = \frac{1}{e} \left(\frac{x_{(k-h)}}{x_{(k)}}\right)^{1-e} \left(\frac{x_{(k-h)}}{x_{(k)}}\right)^{e-1} = \frac{1}{e}$$

Die Substitutionselastizität zwischen den Einkommen $x_{(k-h)}$ und $x_{(k)}$ entspricht also dem reziproken Wert des Parameters e . Für $e \rightarrow +\infty$ beträgt die Substitutionselastizität Null, für $e > 0$ strebt sie gegen $+\infty$. Im ersten Fall findet folglich keine Substitution mehr statt, während im zweiten Grenzfall die Einkommen vollständig substituierbar sind.

(1) R. Bürk und W. Gehrig, Indices of Income Inequality and Societal Income. An Axiomatic Approach, a.a.O., S. 328 f.

Abschließend wollen wir untersuchen, wie der Atkinson-Index c_e auf eine Variation des Parameters e reagiert.

wir berechnen dazu zunächst für n konkave isoelastische Nutzenfunktionen U_i^+ den Dalton-Index b_e , den wir ebenfalls mit dem Index e versehen. Zur Vereinfachung setzen wir diesmal $\sum_{i=1}^n A_i$ gleich Null und erhalten:

$$(I) \quad b_e(X) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{m(X)} \right)^{1-e} \frac{1}{n} \quad \text{für } e > 0 \text{ und } e \neq 1$$

Ferner wissen wir, daß sich jeder Dalton-Index als Transformation des Atkinson-Index darstellen läßt mit (1):

$$b_e(X) = U_e(m(X))^{-1} U_e(m(X)(1-c_e(X)))$$

woraus wir unmittelbar die Darstellung:

$$(II) \quad b_e(X) = (1-c_e(X))^{1-e} \quad \text{für } e > 0 \text{ und } e \neq 1$$

gewinnen. Differenzieren wir die Gleichungen (I) und (II) nach e , so erhalten wir die beiden ersten Ableitungen:

$$(I') \quad b'_e(X) = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{m(X)} \right)^{1-e} \ln \left(\frac{x_i}{m(X)} \right) \frac{1}{n}$$

$$(II') \quad b'_e(X) = - (1-c_e(X))^{1-e} \left[\frac{1-e}{1-c_e(X)} c'_e(X) + \ln(1-c_e(X)) \right]$$

wobei (II') die gesuchte Ableitung $c'_e(X)$ enthält. Lösen wir (II') nach $c'_e(X)$ auf, so folgt:

$$c'_e(X) = - \frac{1-c_e(X)}{1-e} \left[(1-c_e(X))^{e-1} b'_e(X) + \ln(1-c_e(X)) \right]$$

(1) Vgl. dazu Abschnitt 9.4. dieser Arbeit.

Wenden wir uns den beiden Ausdrücken in der eckigen Klammer zu. Wir erhalten für den linksstehenden Ausdruck unter Berücksichtigung der Gleichung (1'):

$$(1-c_e(X))^{e-1} b'_e(X) = - \frac{1}{(1-e)m(Y)} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \ln y_i \right)$$

Für den rechtsstehenden Ausdruck folgt:

$$\ln(1-c_e(X)) = \frac{1}{1-e} \ln m(Y)$$

wobei Y eine strikt monoton wachsende Transformation

der Verteilung X ist mit $y_i = \left(\frac{x_i}{m(X)}\right)^{1-e}$.

Damit können wir insgesamt für die Ableitung $c'_e(X)$ folgern (1):

$$c'_e(X) = \frac{1-c_e(X)}{m(Y)(1-e)^2} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \ln y_i - m(Y) \ln m(Y) \right]$$

Nun ist der Multiplikator auf der rechten Seite der Gleichung stets nichtnegativ, da $c_e(X)$ nur Werte aus dem Intervall $[0,1]$ annehmen kann. Führen wir die Funktion f mit $f(y_i) = y_i \ln y_i$ ein, so erhalten wir für die eckige Klammer den Ausdruck:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(y_i) - f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right)$$

Da f konvex in y_i ist, so ist für alle $n \geq 2$ diese Differenz stets nichtnegativ. Wir zeigen die Richtigkeit dieser Behauptung durch vollständige Induktion (2):

-
- (1) Vgl. F.A.Cowell, Measuring Inequality, Phillip Allan Publishers Limited, Oxford, 1977, S. 162.
- (2) Einen verwandten Beweis für allgemein konvexe Funktionen fand der Verfasser nachträglich in:
C.Berge, Espaces Topologiques. Fonctions multivoques, a.a.O., S. 197

Induktionsbeginn: Es sei $n = 2$. Dann folgt aus der Konvexität von f unmittelbar:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 f(y_i) = \frac{1}{2} f(y_1) + \frac{1}{2} f(y_2) \geq f\left(\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2\right) = f\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 y_i\right)$$

d.h. unsere Behauptung ist für $n = 2$ richtig.

Induktionsschluß von k auf $k+1$: Unsere Behauptung sei für k statt n richtig, d.h. es gelte:

$$\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k f(y_i) \geq f\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i\right)$$

Wir addieren nun auf beiden Seiten der Ungleichung den Ausdruck $\frac{1}{k} f(y_{k+1})$ hinzu und multiplizieren mit $\frac{k}{k+1}$ durch:

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} f(y_i) \geq \frac{k}{k+1} f\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i\right) + \frac{1}{k+1} f(y_{k+1})$$

Da f konvex ist, so folgt für den rechten Ausdruck:

$$\frac{k}{k+1} f\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i\right) + \frac{1}{k+1} f(y_{k+1}) \geq f\left(\frac{k}{k+1} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y_i + \frac{1}{k+1} y_{k+1}\right)$$

Fassen wir die Ungleichungen zusammen, so erhalten wir:

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} f(y_i) \geq f\left(\frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^{k+1} y_i\right)$$

d.h. unsere Behauptung ist auch für $k+1$ statt n richtig, was zu beweisen war.

Aus diesen Ausführungen folgt damit das Ergebnis $c'_e(X) \geq 0$, d.h. die durch c_e angezeigte Disparität verringert sich niemals bei einer Erhöhung des Parameters e (1). Wir können uns damit Atkinson anschließen, der e als ein Maß für die Disparitätsaversion interpretiert (2).

(1) Dies entspricht dem Ergebnis von Cowell, der allerdings nicht explizit die Nichtnegativität des Klammerinhalts beweist. Vgl. F.A.Cowell, Measuring Inequality, a.a.O., S. 163

(2) Vgl. A.B.Atkinson, On the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 257

10.2. Kolm-Index und Nutzenfunktionen mit proportionaler Elastizität

Eine andere parametrische Spezifikation des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung erhalten wir, wenn wir uns Nutzenfunktionen mit proportionaler Elastizität des Grenznutzens zuwenden. Wir stellen dazu den Satz auf:

Satz: Das Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung mit:

$$y^f(X) = U^{-1}\left(\sum_{i=1}^n U(x_i) \frac{1}{n}\right)$$

nimmt genau dann die Gestalt:

$$y^f(X) = -\frac{1}{a} \left[\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(-ax_i) \right] \quad \text{für } a > 0$$

an, wenn für die Elastizität des Grenznutzens der n konkaven individuellen Nutzenfunktionen $U_i^+(x_i) = A_i + U(x_i)$ gilt:

$$-\frac{dU'(x_i)}{dx_i} \frac{x_i}{U'(x_i)} = ax_i \quad \text{mit } a > 0$$

d.h. die Elastizität des Grenznutzens ist direkt proportional zu x_i mit dem Proportionalitätsfaktor a (1).

(1) Eine ebenfalls notwendige wie hinreichende Bedingung wäre die Forderung, daß y^f invariant bezüglich gleicher absoluter Zuwächse wäre. Der keineswegs triviale Beweis findet sich skizziert in:

S.C.Kolm, Unequal Inequalities I, a.a.O., S. 428 ff.

Beweis: Für den Beweis der Suffizienz gehen wir zunächst wieder von der Definition der Elastizität des Grenznutzens aus, der auch die Elastizität der linear transformierten Nutzenfunktionen U_1^+ ist:

$$\frac{U_1^{+''}(x_i)}{U_1^{+'}(x_i)} = -a \frac{x_i}{x_i}$$

Durch beidseitige Integration, wobei wir die Integrationskonstanten vernachlässigen, da sich alle individuellen Grenznutzenfunktionen $U_1^+ = U'$ gleichen, erhalten wir:

$$\int d \ln U_1^+(x_i) = -a \int dx_i$$

oder aber durch algebraische Umformung:

$$U_1^{+'}(x_i) = \exp(-ax_i)$$

Durch nochmalige beidseitige Integration ergibt sich:

$$\int dU_1^+(x_i) = \int \exp(-ax_i) dx_i$$

woraus wir für alle $a \geq 0$ die individuellen Nutzenfunktionen:

$$U_1^+(x_i) = A_i + U_a(x_i) \quad \text{mit:}$$

$$U_a(x_i) = -a \exp(-ax_i)$$

erhalten, die offensichtlich eine Funktion der Proportionalitätskonstante a sind.

Aus der Definition des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung:

$$y^f_a(X) = U^{-1}\left(\sum_{i=1}^n U(x_i) \frac{1}{n}\right)$$

folgt somit:

$$y^f_a(X) = -\frac{1}{a} \left[\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(-ax_i) \right]$$

was zu beweisen war. Mit dem Index a kennzeichnen wir, daß wir y^f nun auch als Funktion der Proportionalitätskonstante a auffassen.

Der Beweis der Notwendigkeit erübrigt sich, da wir nur die Reihenfolge der gemachten Operationen umzukehren brauchen.

Als nächstes betrachten wir den Grenzfall $a \rightarrow 0$:

Nach der Regel von l'Hospital erhalten wir:

$$\lim_{a \rightarrow 0} y^f_a(X) = \lim_{a \rightarrow 0} - \frac{\frac{d}{da} \left[\ln \sum_{i=1}^n \exp(-ax_i) \frac{1}{n} \right]}{\frac{da}{da}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^n \exp(-ax_i) x_i}{\sum_{i=1}^n \exp(-ax_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \frac{1}{n} = m(X)$$

In diesem Grenzfall reagiert das Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung nur noch auf Variationen des Durchschnittseinkommens $m(X)$.

(1) Zur Regel von de l'Hospital siehe etwa:

F.Erwe, Differential- und Integralrechnung, Band 1,
B.I.Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1973, S.161 ff.

Für den Grenzfall $a \rightarrow +\infty$ folgt zunächst aus der Symmetrie von y^f die Darstellung:

$$y_a^f(X) = -\frac{1}{a} \left[\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(-ax_{(i)}) \right]$$

Nehmen wir nun wieder an, daß insgesamt r Komponenten ($r \geq 1$) des Vektors X mit $x_{(1)}$ übereinstimmen, d.h. $x_{(1)} = \dots = x_{(r)}$ und $x_{(r)} < x_{(r+1)}$. Dann folgt zunächst für die Ableitung:

$$\frac{d}{da} \left[-\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(-ax_{(i)}) \right]$$

die Darstellung:

$$\frac{d}{da}(\cdot) = \frac{rx_{(1)}\exp(-ax_{(1)}) + \sum_{i=r+1}^n \exp(-ax_{(i)})}{r\exp(-ax_{(1)}) + \sum_{i=r+1}^n \exp(-ax_{(i)})}$$

Erweitern wir Zähler und Nenner mit $\exp(ax_{(1)})$, so folgt:

$$\frac{d}{da}(\cdot) = \frac{rx_{(1)} + \sum_{i=r+1}^n \exp(-a(x_{(i)} - x_{(1)}))}{r + \sum_{i=r+1}^n \exp(-a(x_{(i)} - x_{(1)}))}$$

Nun ist $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{i=r+1}^n \exp(-a(x_{(i)} - x_{(1)})) = 0$, so daß wir

nach der Regel von de l'Hospital erhalten:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} y_a^f(X) = \lim_{a \rightarrow +\infty} - \frac{\frac{d}{da} \left[\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(-ax_{(i)}) \right]}{\frac{d}{da}} = \frac{rx_{(1)}}{r} = x_{(1)}$$

oder aber $\lim_{a \rightarrow +\infty} y_a^f(X) = \min_i \{x_i\}$, d.h. das Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung; berücksichtigt nur das Minimumeinkommen $x_{(1)}$.

Aus den vorstehenden Ergebnissen für das Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung erhalten wir damit für den Kolm-Index k :

Korollar: Der Kolm-Index k mit:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+ : k(X) = m(X) - y^f(X)$$

hat genau dann die Gestalt (1):

$$k_a(X) = \frac{1}{a} \ln \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(a(m(X) - x_i)) \right]$$

wenn die individuellen Nutzenfunktionen eine zu x proportionale Elastizität des Grenznutzens aufweisen.

Für die Grenzfälle $a \rightarrow 0$ und $a \rightarrow +\infty$ folgen speziell (2):

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} k_a(X) &= m(X) - \lim_{a \rightarrow 0} y_a^f(X) \\ &= m(X) - m(X) = 0 \end{aligned}$$

d.h. der Kolm-Index k_a nimmt für $a \rightarrow 0$ stets den trivialen Wert Null an. Für $a \rightarrow +\infty$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} k_a(X) &= m(X) - \lim_{a \rightarrow +\infty} y_a^f(X) \\ &= m(X) - \min_i \{x_i\} \end{aligned}$$

d.h. der Kolm-Index zeigt in diesem Fall die Distanz zwischen Durchschnitts- und Minimum-Einkommen einer Verteilung X an.

(1) Vgl. S.-C.Kolm, Unequal Inequalities I, a.a.O., S. 419

C.Blackorby und D.Donaldson, A Theoretical Treatment of Indices of Absolute Inequality, a.a.O., S. 116 f.

(2) In der Literatur finden sich die Ergebnisse ohne explizite Herleitung.

In diesen beiden Grenzfällen zeigt sich eine enge Verwandtschaft zum Atkinson-Index (1). Diese zeigt sich auch bei der Frage nach weiteren Interpretationsmöglichkeiten des Parameters a . Wir berechnen dazu wieder die erste partielle Ableitung des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung y_a^f nach $x_{(k)}$. Aus der Definition von y_a^f folgt zunächst die Gleichung:

$$\exp(-ay_a^f(X^0)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(-ax_{(i)})$$

Differenzieren wir sie partiell nach $x_{(k)}$, so resultiert:

$$\exp(-ay_a^f(X^0))(-ay_{a(k)}^{f,}(X^0)) = \frac{1}{n} \exp(-ax_{(k)})(-a)$$

oder aber nach algebraischer Umformung:

$$y_{a(k)}^{f,}(X^0) = \frac{1}{n} \left[\frac{\exp(y_a^f(X^0))}{\exp(x_{(k)})} \right]^a$$

Nun berechnen wir das totale Differential von y_a^f bei einer marginalen Änderung von $x_{(k-h)}$ und $x_{(k)}$ ($h \geq 1$):

$$dy_a^f(X^0) = y_{a(k-h)}^{f,}(X^0)dx_{(k-h)} + y_{a(k)}^{f,}(X^0)dx_{(k)}$$

Setzen wir dy_a^f gleich Null, so erhalten wir die marginale Substitutions- oder Transferrate zwischen den beiden Einkommen $x_{(k-h)}$ und $x_{(k)}$ mit:

$$-\frac{dx_{(k-h)}}{dx_{(k)}} = \frac{y_{a(k)}^{f,}(X^0)}{y_{a(k-h)}^{f,}(X^0)} = \left[\frac{\exp(x_{(k-h)})}{\exp(x_{(k)})} \right]^a$$

(1) Vgl. dazu Abschnitt 10.1. dieser Arbeit.

Da $x_{(k-h)}$ für alle $h \geq 1$ kleiner oder gleich $x_{(k)}$ und die Exponentialfunktion $\exp$ strikt monoton wachsend ist, so ist die marginale Substitutionsrate zwischen den Einkommen $x_{(k-h)}$ und $x_{(k)}$ stets kleiner oder gleich Eins.

Für die Spezialfälle $a \rightarrow 0$ und $a \rightarrow +\infty$ folgt:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{y_{a(k)}^{f_1}(X^0)}{y_{a(k-h)}^{f_1}(X^0)} = 1 \quad (x_{(k-h)} \geq 0)$$

d.h. unabhängig von den Einkommen $x_{(k-h)}$ und $x_{(k)}$ nimmt die marginale Substitutionsrate stets den Wert Eins an.

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{y_{a(k)}^{f_1}(X^0)}{y_{a(k-h)}^{f_1}(X^0)} = 0 \quad \text{falls } x_{(k-h)} < x_{(k)}$$

d.h. die marginale Substitutionsrate ist Null, vorausgesetzt, daß $x_{(k)}$ von $x_{(k-h)}$ verschieden ist.

Schließlich erhalten wir den Fall $a = 1$:

$$\frac{y_1^{f_1}(X^0)}{y_1^{f_1}(X^0)} = \frac{\exp(x_{(k-h)})}{\exp(x_{(k)})}$$

d.h. die marginale Substitutionsrate ist in der Variablen $\exp(x_{(k-h)})/\exp(x_{(k)})$ linear.

Bei gegebenem Parameter a können wir die marginale Substitutionsrate als Funktion von $\exp(x_{(k-h)})/\exp(x_{(k)})$ auffassen und nach ihrer Reagibilität in bezug auf Änderungen dieses Quotienten fragen:

Die erste Ableitung nach $\exp(x_{(k-h)})/\exp(x_{(k)})$ ergibt:

$$-\frac{d\left(\frac{dx_{(k-h)}}{dx_{(k)}}\right)}{d\left(\frac{\exp(x_{(k-h)})}{\exp(x_{(k)})}\right)} = a \left[\frac{\exp(x_{(k-h)})}{\exp(x_{(k)})} \right]^{a-1}$$

Dieser Differentialquotient ist für alle $a > 0$ positiv. Für die zweite Ableitung erhalten wir:

$$-\frac{d^2\left(\frac{dx_{(k-h)}}{dx_{(k)}}\right)}{d\left(\frac{\exp(x_{(k-h)})}{\exp(x_{(k)})}\right)^2} = a(a-1) \left[\frac{\exp(x_{(k-h)})}{\exp(x_{(k)})} \right]^{a-2}$$

Wiederum müssen wir eine Fallunterscheidung treffen: Für alle a aus dem Intervall $(0,1)$ ist die zweite Ableitung negativ, für alle anderen $a > 1$ stets positiv. Im ersten Fall ist die Transfer- oder Substitutionsrate eine strikt konkave Funktion von $\exp(x_{(k-h)})/\exp(x_{(k)})$, im zweiten Fall dagegen eine strikt konvexe. Wir können dieses Ergebnis durch folgende Graphik veranschaulichen:

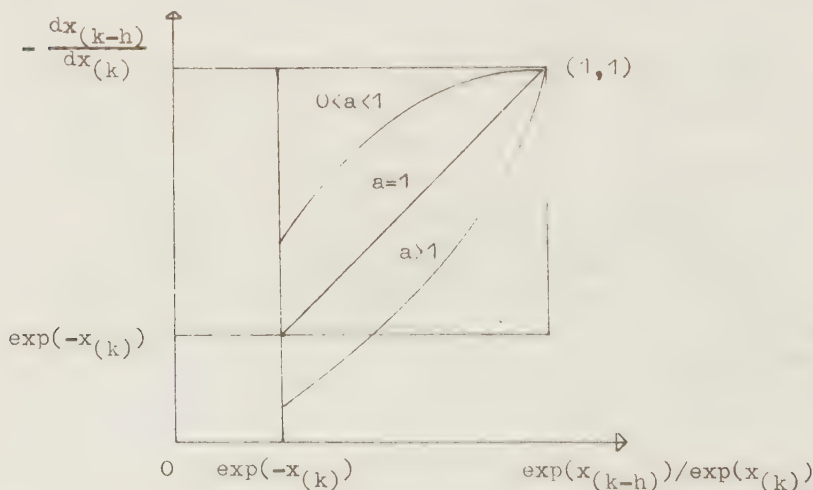


Abb. 3: Marginale Substitutionsrate.

Für alle a aus dem Intervall $(0,1)$ weist die marginale Substitutionsrate eine große Reagibilität bezüglich ausgeprägter Einkommensdifferenzen auf, während umgekehrt für alle $a > 1$ das Schwergewicht auf die Frage gerichtet ist, ob überhaupt Einkommensunterschiede bestehen. Damit können wir den Parameter a als ein Maß für die Ordinalität des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung y_a^f und des Kolm-Index k_a interpretieren.

Ferner entspricht $\frac{1}{a}$ der modifizierten Substitutionselastizität σ^+ mit:

$$\sigma^+ = \frac{d\left(\frac{\exp(x_{(k-h)})}{\exp(x_{(k)})}\right)}{d\left(\frac{dx_{(k-h)}}{dx_{(k)}}\right)} \cdot \frac{\frac{dx_{(k-h)}}{dx_{(k)}}}{\frac{\exp(x_{(k-h)})}{\exp(x_{(k)})}}$$

d.h. wir setzen die relative Änderung des Quotienten $\exp(x_{(k-h)})/\exp(x_{(k)})$ in bezug zur relativen Änderung der marginalen Substitutionsrate. Aus dieser Definition folgt nun:

$$\sigma^+ = \frac{1}{a} \left[\frac{\exp(x_{(k-h)})}{\exp(x_{(k)})} \right]^{1-a} \left[\frac{\exp(x_{(k-h)})}{\exp(x_{(k)})} \right]^{a-1} = \frac{1}{a}$$

was zu beweisen war. Für $a \rightarrow +\infty$ beträgt die modifizierte Substitutionselastizität Null, für $a \rightarrow 0$ strebt sie gegen den Grenzwert $+\infty$.

Die hier aufgezeigte enge Verwandtschaft des Parameters a mit dem Parameter e bezüglich seiner Eigenschaften und Interpretationsmöglichkeiten ist jedoch nicht zufällig. Wir können dazu den folgenden Satz angeben:

Satz: Für alle $a > 1$ besteht zwischen den beiden Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung y_a^f und y_e^f die Beziehung (1):

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+: y_a^f(X) = \ln y_e^f(Y) \quad \text{mit } e = 1+a$$

wobei Y eine strikt monoton wachsende Transformation der Verteilung X ist mit $y_i = \exp(x_i)$.

Beweis: Aus der Definition von y_a^f erhalten wir:

$$y_a^f(X) = -\frac{1}{a} \left[\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(x_i)^{-a} \right]$$

Setzen wir $a = e - 1$ und $y_i = \exp(x_i)$, so folgt:

$$y_a^f(X) = \frac{1}{1-e} \left[\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^{1-e} \right] \quad \text{oder aber:}$$

$$y_a^f(X) = \ln \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n y_i^{1-e}} \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{1-e}} = \ln y_e^f(Y)$$

was zu beweisen war.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar das Korollar:

Korollar: Für alle $a > 1$ besteht zwischen dem Kolm-Index k_a und dem Atkinson-Index c_e die Beziehung:

$$\forall X \in \mathbb{R}_n^+: k_a(X) = m(X) - \ln m(Y)(1 - c_e(Y))$$

mit $e = 1+a$

wobei Y eine strikt monoton wachsende Transformation der Verteilung X ist mit $y_i = \exp(x_i)$.

(1) Vgl. dazu auch Fußnote 9) in: C.Blackorby und D., Donaldson, A Theoretical Treatment of Indices of Absolute Inequality, a.a.O., S. 117

Beweis: Zunächst folgt aus der Definition des Atkinson-Index:

$$y_e^f(Y) = m(Y)(1 - c_e(Y))$$

Damit erhalten wir unmittelbar unter Benützung des vorausgehenden Satzes:

$$k_a(X) = m(X) - \ln m(Y)(1 - c_e(Y))$$

mit $e = 1+a$ und $y_i = \exp(x_i)$ für alle Komponenten des Vektors Y .

Mit Hilfe dieses Korollars können wir die folgende Behauptung beweisen: Der Parameter a ist ein Maß für die Disparitätsaversion.

Dazu bilden wir die erste Ableitung des Kolm-Index k_a nach dem Parameter a :

$$k'_a(X) = \frac{d}{da} [m(X) - \ln m(Y)(1 - c_e(Y))] \frac{de}{da}$$

woraus:

$$k'_a(X) = (1 - c_e(Y))^{-1} c'_e(Y)$$

resultiert. Da der Term $(1 - c_e(Y))$ nur Werte aus dem Intervall $(0,1)$ annehmen kann und weiterhin die Ableitung $c'_e(Y)$ stets größer oder gleich Null ist (1), folgt damit das gesuchte Ergebnis $k'_a(X) \geq 0$, d.h. die durch k_a ausgewiesene Disparität verringert sich niemals bei einer Erhöhung des Parameters a . Wir können also a als Maß für die Disparitätsaversion auffassen (2).

(1) Vgl. dazu Abschnitt 10.1. dieser Arbeit.

(2) Unser Ergebnis $k'_a \geq 0$ findet sich auch bei Kolm. Kolm verwendet jedoch eine andere Beweisidee. Vgl. S.-C.Kolm, Unequal Inequalities I, a.a.O., S. 439

Abschließend wollen wir noch auf die beiden folgenden Eigenschaften des Kolm-Index k_a hinweisen (1):

Korollar: Gleiche proportionale Zuwächse erhöhen die Disparität, während gleiche absolute Zuwächse die Disparität unverändert lassen.

Beweis: Wir erhalten bei gleichen proportionalen Zuwächsen mit $\beta > 0$:

$$\begin{aligned} k_a(x_1 + \beta x_1, \dots, x_n + \beta x_n) &= \frac{1}{a} \left[\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(a(1+\beta)(m(X) - x_i)) \right] \\ &= \frac{1+\beta}{a(1+\beta)} \left[\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(a(1+\beta)(m(X) - x_i)) \right] \\ &= (1+\beta) k_{a(1+\beta)}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist stets größer als $k_a(x_1, \dots, x_n)$, da $\beta > 0$ und k'_a stets nichtnegativ ist, so daß $k_{a(1+\beta)} \geq k_a$ gilt.

Für gleiche absolute Zuwächse $x_0 > 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} k_a(x_1 + x_0, \dots, x_n + x_0) &= \frac{1}{a} \left[\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(a(m(X) + x_0 - x_i - x_0)) \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[\ln \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(a(m(X) - x_i)) \right] \\ &= k_a(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Wir können damit k_a als absolutes Verteilungsmaß auffassen, da k_a invariant bezüglich gleicher absoluter Zuwächse ist (2).

(1) Vgl. S.-C.Kolm, Unequal Inequalities I, a.a.O., S. 439

(2) Zum Begriff eines absoluten Verteilungsmaßes siehe: C.Blackorby und D.Donaldson, A Theoretical Treatment of Indices of Absolute Inequality, a.a.O., S. 107 ff.

10.3. Maxi-Min-Relation und utilitaristische Verteilungsmaßstäbe

Wir betrachten im folgenden die Beziehungen, die zwischen ausgewählten strikten utilitaristischen Verteilungsmaßstäben und der Maxi-Min-Relation bestehen (1):

Def.: Gegeben sei eine utilitaristische Wohlfahrtsfunktion W_e , die aus n isoelastischen Nutzenfunktionen hervorgeht mit:

$$W_e(X) = \sum_{i=1}^n (A_i + U_e(x_i)) \frac{1}{n}$$

$$\text{wobei: } U_e(x_i) = (1-e)^{-1} x_i^{1-e} \quad \text{für } e > 0 \\ e \neq 1$$

$$U_e(x_i) = \ln x_i \quad \text{für } e = 1$$

Dann bezeichnen wir mit $P_{y_e}^f$ einen strikten normativen Verteilungsmaßstab, der nach der Vorschrift:

$$\forall X, Y \in R_n^+: P_{y_e}^f(X, Y) \iff y_e^f(X) > y_e^f(Y)$$

gebildet wird und die vom Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung induzierte strikte Rangordnung über den Verteilungen repräsentiert.

Dann können wir für die beiden strikten Verteilungsmaßstäbe P_{W_e} und $P_{y_e}^f$ den Satz aufstellen:

Satz: Die strikten partiellen Ordnungen P_{W_e} und $P_{y_e}^f$ sind einander äquivalent, d.h. es gilt:

$$\forall X, Y \in R_n^+: P_{W_e}(X, Y) \iff P_{y_e}^f(X, Y)$$

(1) Die folgenden Ausführungen stützen sich auf:
P.J.Hammond, A Note on Extreme Inequality Aversion,
Journal of Economic Theory, Vol. 14, 1975, S. 465 ff.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Beziehung:

$$W_e(X) = U_e(y_e^f(X)) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i$$

und der Umkehrbarkeit der strikt monoton wachsenden Funktion U_e .

Welche Aussagen können wir für $e \rightarrow +\infty$ machen? Wir führen dazu die beiden Grenzrelationen $P_{y_\infty}^f$ und P_{w_∞} ein (1):

Def.: Unter den Grenzrelationen $P_{y_\infty}^f$ und P_{w_∞} verstehen wir zwei strikte normative Verteilungsmaßstäbe, die nach den Vorschriften:

$$\forall X, Y \in R_n^+: P_{y_\infty}^f(X, Y) \iff \lim_{e \rightarrow +\infty} y_e^f(X) > \lim_{e \rightarrow +\infty} y_e^f(Y)$$

$$\forall X, Y \in R_n^+: P_{w_\infty}(X, Y) \iff \exists e_0: \forall e > e_0: W_e(X) > W_e(Y)$$

gebildet werden.

Da für den Grenzwert des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung die Beziehung $\lim_{e \rightarrow +\infty} y_e^f(X) = \min_i \{x_i\}$ gilt, können wir sofort das Lemma aufstellen:

Lemma: Die Grenzrelation $P_{y_\infty}^f$ ist mit der Maxi-Min-Relation äquivalent (2):

$$\forall X, Y \in R_n^+: P_{y_\infty}^f(X, Y) \iff \min_i \{x_i\} > \min_i \{y_i\}$$

extreme Disparitätsaversion ist also gleichbedeutend mit einer vollständigen Ausrichtung am Maxi-Min-Kriterium.

(1) Vgl. P.J.Hammond, A Note on Extreme Inequality Aversion, a.a.O., S. 466

In welchem Verhältnis stehen nun die beiden Grenzrelationen zueinander? Wir behaupten:

Lemma: Die Grenzrelation $P_{e^y_\infty}^f$ ist Subrelation der Grenzrelation $P_{e^w_\infty}$, d.h. es gilt:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: P_{e^y_\infty}^f(X, Y) \implies P_{e^w_\infty}(X, Y)$$

Hinreichend für $P_{e^w_\infty}(X, Y)$ ist also, daß $\min_i \{x_i\} > \min_i \{y_i\}$ ist.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß aus der Voraussetzung $\min_i \{x_i\} > \min_i \{y_i\}$ die Existenz eines e_0 folgt mit der Eigenschaft: $\forall e > e_0: y_e^f(X) > y_e^f(Y)$

Zunächst sind die beiden Aussagen:

$$\lim_{e \rightarrow +\infty} y_e^f(X) = \min_i \{x_i\}$$

$$\lim_{e \rightarrow +\infty} y_e^f(Y) = \min_i \{y_i\}$$

definitiorisch gleichbedeutend mit:

$$\exists e_0: \forall e > e_0: |y_e^f(X) - \min_i \{x_i\}| < q$$

$$\exists e_0': \forall e > e_0': |y_e^f(Y) - \min_i \{y_i\}| < q$$

d.h. nach Vorgabe einer beliebigen positiven Zahl q existieren zwei Zahlen e_0 und e_0' , so daß sich für alle weiteren $e > e_0$ bzw. $e > e_0'$ die dazugehörigen Werte von $y_e^f(X)$ bzw. $y_e^f(Y)$ absolut genommen von ihren Grenzwerten nicht mehr unterscheiden als um q .

Nichts hindert uns, für q gerade den Wert:

$$q = \frac{1}{2}(\min_i \{x_i\} - \min_i \{y_i\}) > 0 \quad (\text{nach Voraussetzung!})$$

vorzugeben. Weiterhin nehmen wir an, daß für dieses q gerade $e_0 \succ e_0'$ gilt, woraus die beiden Aussagen folgen:

$$\forall e \succ e_0: y_e^f(X) > \min_i x_i - q = \frac{1}{2}(\min_i \{x_i\} + \min_i \{y_i\})$$

$$\forall e \succ e_0: y_e^f(Y) < \min_i y_i + q = \frac{1}{2}(\min_i \{x_i\} + \min_i \{y_i\})$$

Durch Zusammenfassung der beiden Ungleichungen folgt:

$$\exists e_0: \forall e \succ e_0: y_e^f(X) > \frac{1}{2}(\min_i \{x_i\} + \min_i \{y_i\}) > y_e^f(Y) \quad \text{oder:}$$

$$\exists e_0: \forall e \succ e_0: y_e^f(X) > y_e^f(Y) \quad \text{was wir zeigen wollten.}$$

Wenden wir auf diese Ungleichung nun die strikt monoton wachsende Funktion U_e an, so erhalten wir:

$$\exists e_0: \forall e \succ e_0: U_e(y_e^f(X)) > U_e(y_e^f(Y)) \quad \text{oder aber:}$$

$$\exists e_0: \forall e \succ e_0: w_e(X) > w_e(Y) \quad \text{was } P_{e_{w\infty}}^w(X, Y) \text{ impliziert,}$$

womit unser Lemma bewiesen wäre.

Die Umkehrung der in diesem Lemma getroffenen Aussage ist jedoch nicht richtig, d.h. die Maxi-Min-Relation ist nicht äquivalent mit der Grenzrelation $P_{e_{w\infty}}^w$. Vielmehr ist $P_{e_{w\infty}}^w$ identisch mit der Relation P_{lex}^w , d.h. der symmetrischen lexikographischen Erweiterung der Maxi-Min-Relation (1).

(1) Zur lexikographischen Erweiterung der Maxi-Min-Relation siehe etwa:

A.K.Sen, Collective Choice and Social Welfare, a.a.O., S. 138

Wir definieren dazu (1):

Def.: Unter der symmetrischen lexikographischen Erweiterung von Maxi-Min verstehen wir einen strikten Verteilungsmaßstab P_{lex} , der nach der Vorschrift:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : P_{lex}(X, Y) \iff \begin{cases} x_{(i)} = y_{(i)} & i = 1, \dots, r-1 \\ x_{(r)} > y_{(r)} & \text{mit } r \leq n \end{cases}$$

gebildet wird.

Dann können wir den folgenden Satz beweisen (2):

Satz: Die Grenzrelation $P_{W_{\infty}}$ ist mit der symmetrischen lexikographischen Erweiterung von Maxi-Min P_{lex} äquivalent, d.h.:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ : P_{lex}(X, Y) \iff P_{W_{\infty}}(X, Y)$$

Beweis: Wir geben uns dazu zwei Verteilungen X und Y vor, für deren geordnete Komponenten gelten soll:

$$\begin{aligned} x_{(i)} &= y_{(i)} & i &= 1, \dots, r-1 \\ x_{(r)} &> y_{(r)} & \text{mit } r &\leq n \end{aligned}$$

d.h. wir setzen $P_{lex}(X, Y)$ voraus. Definieren wir die beiden "Restverteilungen" X_r^0 und Y_r^0 mit:

$$X_r^0 = (x_{(r)}, \dots, x_{(n)}) \quad Y_r^0 = (y_{(r)}, \dots, y_{(n)})$$

so erhalten wir mit ihrer Hilfe für $W_e(X) - W_e(Y)$:

$$W_e(X) - W_e(Y) = W_e(X_r^0) - W_e(Y_r^0)$$

da für alle $i = 1, \dots, r-1$ voraussetzungsgemäß

$$U_e(x_{(i)}) = U_e(y_{(i)}) \text{ gilt.}$$

(1) Vgl. P.J.Hammond, A Note on Extreme Inequality Aversion, a.a.O., S. 466

(2) Zu Satz und Beweis siehe: P.J.Hammond, A Note on Extreme Inequality Aversion, a.a.O., S. 466 f.

Für die beiden geordneten Restverteilungen x_r^0 und y_r^0 folgt nun aus der Voraussetzung $x(r) > y(r)$:

$$\min\{x_{(i)} \mid i = r, \dots, n\} > \min\{y_{(i)} \mid i = r, \dots, n\}$$

so daß unter Anwendung des vorstehenden Lemmas folgt:

$$\exists e_0: \forall e > e_0: w_e(x_r^0) > w_e(y_r^0) \quad \text{oder aber:}$$

$$\exists e_0: \forall e > e_0: \sum_{i=r}^n U_e(x_{(i)}) \frac{1}{n} - \sum_{i=r}^n U_e(y_{(i)}) \frac{1}{n} > 0$$

Da für alle $i = 1, \dots, r-1$ die Differenzen $U_e(x_{(i)}) - U_e(y_{(i)})$ stets Null betragen, dürfen wir auch schreiben:

$$\exists e_0: \forall e > e_0: \sum_{i=1}^n U_e(x_{(i)}) \frac{1}{n} - \sum_{i=1}^n U_e(y_{(i)}) \frac{1}{n} > 0 \quad \text{oder:}$$

$$\exists e_0: \forall e > e_0: w_e(X) > w_e(Y) \quad \text{was } P_{e_0}^{w_\alpha}(X, Y) \text{ impli-}$$

ziert.

Zum Beweis der Richtung: " $P_{e_\infty}^{w_\alpha}(X, Y) \Rightarrow F_{\text{lex}}(X, Y)$ " nehmen wir an, daß die Aussage " $P_{e_\infty}^{w_\alpha}(X, Y) \Rightarrow \text{nicht } F_{\text{lex}}(X, Y)$ " richtig sei. Nun ist " $\text{nicht } F_{\text{lex}}(X, Y)$ " äquivalent mit $F_{\text{lex}}(Y, X)$ oder aber $I_{\text{lex}}(X, Y)$, wobei I_{lex} definiert ist mit:

$$\text{Def.: } \forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: I_{\text{lex}}(X, Y) \iff x_{(i)} = y_{(i)} \quad i = 1, \dots, n$$

Nun folgt aus $F_{\text{lex}}(Y, X)$ die Aussage $P_{e_\infty}^{w_\alpha}(Y, X)$ und damit " $\text{nicht } P_{e_\alpha}^{w_\alpha}(X, Y)$ ", was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Entsprechend folgt aus $I_{\text{lex}}(X, Y)$ die Aussagen: " $\text{nicht } P_{e_\infty}^{w_\alpha}(X, Y)$ und nicht $P_{e_\infty}^{w_\alpha}(Y, X)$ ", was wiederum im Gegensatz zur Voraussetzung $P_{e_\infty}^{w_\alpha}(X, Y)$ steht. Also muß $F_{\text{lex}}(X, Y)$ gelten was zu beweisen war.

Fassen wir zusammen: Solange wir für den Parameter e endliche Werte wählen, sind die beiden strikten Verteilungsmakstabe $P_{y_e}^f$ und P_{w_e} einander äquivalent. Diese Äquivalenz erlischt jedoch an der Grenze $e \rightarrow +\infty$. In diesem Fall ist die Grenzrelation $P_{e_y\infty}^f$ mit der Maxi-Min-Relation identisch, während $P_{e_w\infty}$ mit der lexikographischen Erweiterung der Maxi-Min-Relation P_{lex} äquivalent ist. Definieren wir zusätzlich die Grenzäquivalenzrelationen $I_{e_y\infty}^f$ und $I_{e_w\infty}$ mit:

$$\text{Def.: } \forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: \quad I_{e_y\infty}^f(X, Y) \Leftrightarrow \lim_{e \rightarrow +\infty} y_e^f(X) = \lim_{e \rightarrow +\infty} y_e^f(Y)$$

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: \quad I_{e_w\infty}(X, Y) \Leftrightarrow \exists e_0: \forall e > e_0: w_e(X) = w_e(Y)$$

wobei offensichtlich $I_{e_w\infty}$ mit I_{lex} äquivalent ist(1), so können wir den Sachverhalt auch so beschreiben: Die durch die Grenzäquivalenzrelation $I_{e_y\infty}^f$ festgelegte Äquivalenzklasse von Verteilungen enthält mehr Verteilungen als die durch $I_{e_w\infty}$ induzierte Äquivalenzklasse, d.h. die Aussage $I_{e_y\infty}^f(X, Y)$ impliziert stets die Aussage $I_{e_y\infty}^f(X, Y)$, während die Umkehrung nicht richtig ist.

(1) Aus $I_{lex}(X, Y)$ folgt: $x_{(i)} = y_{(i)}$ für $i = 1, \dots, n$ und damit: $\forall e \geq 0: w_e(X) = w_e(Y)$, was $I_{e_w\infty}(X, Y)$ impliziert.

Umgekehrt impliziert $I_{e_w\infty}(X, Y)$ unmittelbar $I_{lex}(X, Y)$, da die gegenteilige Annahme "nicht $I_{lex}(X, Y)$ " äquivalent mit " $P_{lex}(X, Y)$ oder $P_{lex}(Y, X)$ " wäre, was die Aussagen " $P_{e_y\infty}^f(X, Y)$ oder $P_{e_y\infty}^f(Y, X)$ " implizierte, was aber im Widerspruch zur Voraussetzung $I_{e_w\infty}$ steht.

Für Nutzenfunktionen mit proportionaler Elastizität des Grenznutzens können wir analoge Ergebnisse ableiten.
Dazu definieren wir:

Def.: Gegeben sei eine utilitaristische Wohlfahrtsfunktion W_a , die aus n Nutzenfunktionen mit proportionaler Elastizität des Grenznutzens hervorgeht:

$$W_a(X) = \sum_{i=1}^n (A_i - U_a(x_i)) \frac{1}{n} \quad a > 0$$

$$U_a(x_i) = -a \exp(-ax_i)$$

Dann bezeichnen wir mit $P_{y_a}^f$ einen strikten normativen Verteilungsmaßstab, der nach der Vorschrift:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: \quad P_{y_a}^f(X, Y) \iff y_a^f(X) > y_a^f(Y)$$

gebildet wird und die vom Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung y_a^f induzierte strikte Rangordnung über den Verteilungen repräsentiert.

Dann besteht zwischen dem utilitaristischen strikten Verteilungsmaßstab P_{W_a} und dem Maßstab $P_{y_a}^f$ folgender Zusammenhang:

Satz: Für alle endlichen Parameterwerte $a > 0$ sind die beiden Aussagen äquivalent:

a) $P_{W_a}(X, Y)$, d.h. es gilt $W_a(X) > W_a(Y)$

b) $P_{y_a}^f(X, Y)$, d.h. es gilt $y_a^f(X) > y_a^f(Y)$

Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt unmittelbar aus:

$$W_a(X) = U_a(y_a^f(X)) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i$$

und der Tatsache, daß U_a als strikt monoton wachsende Funktion eindeutig umkehrbar ist.

Nun führen wir die Grenzrelationen $P_{a^y\infty}^f$ und $P_{a^w\infty}$ ein:

Def.: Mit $P_{a^y\infty}^f$ und $P_{a^w\infty}$ bezeichnen wir zwei strikte normative Verteilungsmaßstäbe, die nach den Vorschriften:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: P_{a^y\infty}^f(X, Y) \iff \lim_{a \rightarrow +\infty} y_a^f(X) > \lim_{a \rightarrow +\infty} y_a^f(Y)$$

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: P_{a^w\infty}(X, Y) \iff \exists a_0: \forall a > a_0: w_a(X) > w_a(Y)$$

gebildet werden (1).

Da an der Grenze $\lim_{a \rightarrow +\infty} y_a^f(X) = \min_i \{x_i\}$ gilt, ist damit die folgende Behauptung richtig:

Lemma: Die Grenzrelation $P_{a^y\infty}^f$ ist mit der Maxi-Min-Relation äquivalent, d.h.:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: P_{a^y\infty}^f(X, Y) \iff \min_i \{x_i\} > \min_i \{y_i\}$$

Dies ist jedoch nicht auch für $P_{a^w\infty}$ richtig. Immerhin gilt:

Lemma: Die Grenzrelation $P_{a^y\infty}^f$ ist Subrelation von $P_{a^w\infty}$, d.h.:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: P_{a^y\infty}^f(X, Y) \implies P_{a^w\infty}(X, Y)$$

$$P_{a^w\infty}(X, Y) \text{ ist also notwendig für } \min_i \{x_i\} > \min_i \{y_i\}.$$

Beweis: Zunächst folgt aus $P_{a^y\infty}^f(X, Y)$ die Existenz eines a_0

$$\text{mit der Eigenschaft: } \forall a > a_0: y_a^f(X) > y_a^f(Y). (2)$$

(1) Für den Grenzwert $w_a(X)$ gilt: $\lim_{a \rightarrow +\infty} w_a(X) = 0$ für alle X .

(2) Dies wurde schon für $P_{e^y\infty}^f$ gezeigt. Setzen wir für e den Parameter a , so erhalten wir unmittelbar unsere Behauptung.

Damit ist aber auch die Aussage:

$$\exists a_0: \forall a > a_0: U_a(y_a^f(X)) > U_a(y_a^f(Y))$$

richtig, da U_a strikt monoton wachsend ist, woraus:

$$\exists a_0: \forall a > a_0: w_a(X) > w_a(Y) \text{ oder aber } P_{a, \infty}^w(X, i)$$

folgt, was zu beweisen war.

Die Umkehrung dieser Aussage ist jedoch nicht zulässig. Vielmehr gilt:

Satz: Die Grenzrelation $P_{a, \infty}^w$ ist mit der symmetrischen lexikographischen Erweiterung von Maxi-Min P_{lex} äquivalent, d.h.:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: P_{lex}(X, Y) \iff P_{a, \infty}^w(X, Y)$$

Beweis: Wir wenden dazu das bei $P_{a, \infty}^w$ benutzte Verfahren an.

Wir geben uns zwei Verteilungen X und Y vor, für die $P_{lex}(X, Y)$ und damit:

$$x_{(i)} = y_{(i)} \quad i = 1, \dots, r-1$$

$$x_{(r)} > y_{(r)} \quad r \leq n$$

gelten soll. Da für die beiden geordneten Restverteilungen X_r^0 und Y_r^0 die Ungleichung:

$$\min\{x_{(i)} \mid i = r, \dots, n\} > \min\{y_{(i)} \mid i = r, \dots, n\}$$

erfüllt ist, folgt unter Anwendung des umseitigen Lemmas:

$$\exists a_0: \forall a > a_0: w_a(X_r^0) > w_a(Y_r^0) \text{ oder aber:}$$

$$\exists a_0: \forall a > a_0: \sum_{i=r}^n U_a(x_{(i)}) - \sum_{i=r}^n U_a(y_{(i)}) > 0$$

Da für alle $i = 1, \dots, r-1$ die Differenzen $U_a(x_{(i)}) - U_a(y_{(i)})$ stets Null sind, ist folglich auch:

$$\exists a_0: \forall a > a_0: \sum_{i=1}^n U_a(x_{(i)}) - \sum_{i=1}^n U_a(y_{(i)}) > 0 \quad \text{oder:}$$

$$\exists a_0: \forall a > a_0: W_a(X) > W_a(Y)$$

richtig, was äquivalent mit $P_{W_{a\infty}}(X, Y)$ ist.

Umgekehrt ist die Implikation " $P_{W_{a\infty}}(X, Y) \implies P_{lex}(X, Y)$ " ebenfalls richtig, da die gegenteilige Annahme "nicht $P_{lex}(X, Y)$ " äquivalent wäre mit " $P_{lex}(Y, X)$ oder $I_{lex}(X, Y)$ ". Nun impliziert $P_{lex}(Y, X)$ unmittelbar die Aussagen $P_{W_{a\infty}}(Y, X)$ und damit "nicht $P_{W_{a\infty}}(X, Y)$ ", die im Widerspruch zur Voraussetzung stehen. Ebenso folgt aus $I_{lex}(X, Y)$ die Aussage: "nicht $P_{W_{a\infty}}(X, Y)$ und nicht $P_{W_{a\infty}}(Y, X)$ ", was wiederum im Gegensatz zur Voraussetzung $P_{W_{a\infty}}(X, Y)$ steht.

Abschließend können wir noch die beiden Korollare angeben:

Korollar: Die Grenzrelation $P_{e^y_{\infty}} f$ ist mit der Grenzrelation $P_{a^y_{\infty}} f$ äquivalent, d.h.:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: P_{e^y_{\infty}} f(X, Y) \iff P_{a^y_{\infty}} f(X, Y)$$

Korollar: Die Grenzrelation $P_{e^N_{\infty}}$ ist mit der Grenzrelation $P_{W_{a\infty}}$ äquivalent, d.h.:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+: P_{e^N_{\infty}}(X, Y) \iff P_{W_{a\infty}}(X, Y)$$

Die Beweise sind evident, da $P_{e^y_{\infty}} f$ und $P_{a^y_{\infty}} f$ mit Maxi-Min bzw. $P_{W_{e\infty}}$ und $P_{W_{a\infty}}$ mit der symmetrischen lexikographischen Erweiterung von Maxi-Min äquivalent sind.

11. Lineare Verteilungsmaße und kompatible soziale Wohlfahrtsfunktionen

11.1. Kompatibilität und utilitaristische Wohlfahrtsfunktionen

Wir führen zunächst das Konzept der Kompatibilität ein:

Def.: Gegeben sei ein beliebiges lineares Verteilungsmaß G_g mit zumindest schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion g :

$$G_g(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (L_X(p_i) - L_X(p_{i+1})) Dg(p_{i+1})$$

und eine soziale Wohlfahrtsfunktion W . Die Funktion W ist genau dann mit dem positiven linearen Maß G_g kompatibel, wenn gilt:

$$\forall X, Y \in R_n^+ \text{ und } M(X) = M(Y): R_{G_g}(X, Y) \iff R_W(Y, X)$$

Mit anderen Worten: Ist eine soziale Wohlfahrtsfunktion W mit einem linearen Verteilungsmaß G_g kompatibel, so werden alle Verteilungen mit der gleichen absoluten Merkmalssumme von W wie von G_g invers gleich geordnet. In diesem Fall ist die Relation R_W mit der Relation $R_{G_g}^{-1}$ äquivalent.

In diesem Abschnitt beschränken wir uns zunächst auf utilitaristische wohlfahrtsfunktionen und fragen: Können wir zu einem beliebigen linearen Verteilungsmaß G_g eine utilitaristische Wohlfahrtsfunktion W mit:

$$W(X) = \sum_{i=1}^n U_1^+(x_i) \frac{1}{n}$$

finden, die mit G_g kompatibel ist?

Solange wir nun von zwei Verteilungen X und Y mit der gleichen absoluten Merkmalssumme ausgehen, für die die Aussage $R_L(Y, X)$ wahr ist, kommen wir nicht in Konflikt. Da jede utilitaristische Wohlfahrtsfunktion W konkav und damit auch transferpräferierend ist (1), so gilt:

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}_n^+ \text{ und } M(X) = M(Y): R_L(Y, X) \implies R_W(Y, X) \text{ und } R_{Gg}(X, Y)$$

Verteilungen mit gleicher absoluter Merkmalssumme, die in der Lorenz-Relation R_L enthalten sind, werden also von jedem beliebigen linearen Verteilungsmaß G_g invers gleich wie von jeder beliebigen utilitaristischen Wohlfahrtsfunktion W geordnet. Die Einstufung erfolgt dabei gemäß des Lorenz-Verteilungsmaßstabs. Unsere Fragestellung ist in diesem Fall offensichtlich unerheblich. Sie kann also nur bei Verteilungen relevant werden, deren Lorenz-Kurven sich schneiden und die damit aus der Lorenz-Relation herausfallen. Dazu konstruieren wir uns eine Verteilung X mit zwei Schichten von Einkommensbeziehern (2), wobei die absolute Merkmalssumme $M(X)$ gerade n betrage:

$$X^0 = (x_{(1)}, \dots, x_{(k)}, x_{(k+1)}, \dots, x_{(n)})$$

$$\text{wobei: } x_{(i)} = 1 - B \frac{n}{k} \quad \text{für alle } i = 1, 2, \dots, k$$

$$x_{(i)} = 1 + B \frac{n}{n-k} \quad \text{für alle } i = k+1, \dots, n$$

$$0 \leq B < \frac{k}{n} < 1$$

Innerhalb der beiden Schichten sind die Einkommen gleich-

(1) Vgl. dazu Abschnitt 7.4. dieser Arbeit.

(2) Wir greifen damit eine Beweisidee von Newberry auf:

Vgl. D. Newberry, A Theorem on the Measurement of Inequality, Journal of Economic Theory, Vol. 2, 1970, S. 264 f.

verteilt. Die "untere" Schicht, die die ersten k Einkommensbezieher umfaßt, bezieht ein Durchschnittseinkommen von $1 - B \frac{n}{k}$. Die "obere" Schicht mit den restlichen $n-k$ Einkommensempfängern erhält ein Pro-Kopf-Einkommen von $1 + B \frac{n}{n-k}$. Unabhängig vom Parameter B addieren sich alle Einkommen stets zum absoluten Merkmalsbetrag $M(X)=n$:

$$M(X) = k(1 - B \frac{n}{k}) + (n-k)(1 + B \frac{n}{n-k}) = n$$

Das mittlere Einkommen der ersten k Einkommensbezieher weicht gerade um $B \frac{n}{k}$ vom Durchschnittseinkommen $m(X)=1$ der Gesamtverteilung X nach unten ab. Entsprechend empfangen die restlichen $n-k$ Bezieher ein Pro-Kopf-Einkommen, das um $B \frac{n}{n-k}$ größer als $m(X)$ ist. Das Ausmaß der jeweiligen Abweichungen wird offenbar durch den Parameter B bestimmt, den wir somit ökonomisch als Ungleichheitskoeffizienten interpretieren dürfen. Nimmt B den Wert Null an, so bezieht die untere wie die obere Schicht gerade das Durchschnittseinkommen $m(X)$ der Gesamtverteilung X . Alle Einkommen sind dann gleichverteilt. Erreicht B die obere Schranke $\frac{k}{n}$, so resultiert "an der Grenze" eine Ungleichverteilung, bei der die unteren k Bezieher annähernd ein Einkommen von Null und die $n-k$ Bezieher der oberen Schicht ein Einkommen von annähernd $1 + \frac{k}{n-k}$ empfangen.

Als nächstes bestimmen wir die Lorenz-Kurve L_X der Verteilung X . Wir erhalten:

$$L_X(p_i) = (1 - B \frac{n}{k}) p_i \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

$$L_X(p_i) = -B \frac{n}{n-k} (1 - p_i) + p_i \quad \text{für } i = k+1, \dots, n$$

Die Lorenz-Kurve L_X läßt sich als Funktion von k und des Ungleichheitskoeffizienten B auffassen:

Variiert man bei Konstanz von β den Parameter k im Intervall $(\beta, 1)$, so erhält man eine Schar neuer Lorenz-Kurven, die sich jeweils untereinander aber auch mit der Lorenz-Kurve der Ausgangsverteilung λ schneiden:

Vergleichen wir z.B. die Lorenz-Kurven für die Werte k und $k-1$ mit $\frac{k-1}{n} > \beta > 0$, so folgt:

$$L_{X_k}(p_{k-1}) - L_{X_{k-1}}(p_{k-1}) = \frac{\beta}{k} > 0$$

$$L_{X_k}(p_k) - L_{X_{k-1}}(p_k) = \frac{-\beta}{n-k+1} < 0$$

Da die Differenz der beiden Lorenz-Kurven L_{X_k} und $L_{X_{k-1}}$ das Vorzeichen wechselt, müssen sich die Lorenz-Kurven wie behauptet schneiden.

Eine Änderung des Ungleichheitskoeffizienten β bei Konstanz von k im Intervall $[0, \frac{k}{n})$ erzeugt hingegen eine Schar sich nicht schneidender Lorenz-Kurven:

Vergleichen wir z.B. die Lorenz-Kurven für β und β' , wobei $\beta' < \beta$ gelten soll, so erhalten wir:

$$L_{X_{\beta'}}(p_i) - L_{X_{\beta}}(p_i) = \frac{n}{k}(\beta - \beta')p_i > 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

$$L_{X_{\beta'}}(p_i) - L_{X_{\beta}}(p_i) = \frac{n}{n-k}(\beta - \beta')(1-p_i) > 0 \quad \text{für } i = k+1, \dots, n-1$$

Da die Differenz der Lorenz-Kurven für alle $i = 1, \dots, n-1$ strikt positiv ist, liegt somit die Lorenz-Kurve $L_{X_{\beta'}}$ strikt überhalb der Lorenz-Kurve $L_{X_{\beta}}$. Folglich sind alle Verteilungen, die wir durch Variation von β erhalten, in der Lorenz-Relation R_L enthalten, wobei für alle $\beta' < \beta$ speziell die Aussage $R_L(X_{\beta'}, X_{\beta})$ wahr ist. Umgekehrt fallen

alle Verteilungen, die durch Änderung des Parameters k entstanden sind, aus der Lorenz-Relation R_L heraus.

Welchen Wert nimmt nun ein beliebiges lineares Verteilungsmaß G_g für die Ausgangsverteilung X an? Dazu bilden wir:

$$\begin{aligned} G_g(X) &= \sum_{i=1}^{n-1} (L_{X_g}(p_i) - L_X(p_i)) Dg(p_{i+1}) \\ &= B \sum_{i=1}^k p_i Dg(p_{i+1}) + B \frac{n}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n-1} (1-p_i) Dg(p_{i+1}) \end{aligned}$$

Definieren wir die Funktion q mit:

$$q(k) = \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k p_i Dg(p_{i+1}) + \frac{n}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n-1} (1-p_i) Dg(p_{i+1})$$

so erhalten wir für $G_g(X)$ in verkürzter Schreibweise:

$$G_g(X) = Bq(k)$$

Jedes lineare Verteilungsmaß ist damit direkt proportional zur Funktion $q(k)$ mit dem Ungleichheitskoeffizienten B als Proportionalitätsfaktor. Veränderungen des Koeffizienten B werden bei Konstanz von $q(k)$ somit von jedem linearen Maß in gleicher Weise registriert. Für alle $B' < B$ folgt z.B.:

$$G_g(X_B) - G_g(X_{B'}) = (B-B')q(k) > 0$$

Dieser Gleichschritt ist nicht erstaunlich: Alle Verteilungen, die von Variationen des Koeffizienten B herrühren, sind in der Lorenz-Relation enthalten und müssen daher in gleicher Weise unabhängig von der spezifischen Gestalt der verwendeten Gewichtsfunktion g (vorausgesetzt, sie ist zumindest schwach monoton wachsend) geordnet werden.

Bei einer Änderung des Parameters k sind im allgemeinen keine Aussagen über das Verhalten des linearen Maßes G_g möglich: Dies hängt allein von der Gestalt der verwendeten Gewichtsfunktion g und somit vom Verlauf der Funktion $q(k)$ ab, die sowohl zunehmend, abnehmend wie auch konstant sein kann.

Beschränken wir uns im folgenden auf die Menge aller linearen Verteilungsmaße mit konstanter Funktion $q(k)$, so beantwortet der folgende Satz unsere eingangs gestellte Frage:

Satz: Für alle linearen Verteilungsmaße G_g , für die

$$q(k) = \text{konstant für alle } k \text{ mit } \frac{k}{n} \in (B, 1)$$

existiert keine kompatible differenzierbare utilitaristische Wohlfahrtsfunktion.

Zum Beweis dieses Satzes zeigen wir zunächst die Richtigkeit des folgenden Lemmas:

Lemma: Für eine beliebige im Intervall $[0, +\infty)$ definierte differenzierbare Nutzenfunktion U betrachten wir die konvexe Kombination:

$$rU(1 - \frac{B}{r}) + (1 - r)U(1 + \frac{B}{1-r}); \quad 0 \leq B < r < 1$$

Ist die konvexe Kombination invariant bezüglich des Parameters r , so ist die Funktion U im gesamten Intervall $[0, +\infty)$ linear (1).

(1) Vgl. D.Newbery, A Theorem on the Measurement of Inequality, a.a.O., S. 265

Beweis: Wir setzen die erste Ableitung der konvexen Kombination nach r gleich Null und erhalten nach algebraischer Umformung:

$$U(1 - \frac{\beta}{r}) + \frac{\beta}{r}U'(1 - \frac{\beta}{r}) = U(1 + \frac{\beta}{1-r}) - \frac{\beta}{1-r}U'(1 + \frac{\beta}{1-r})$$

Diese Gleichung ist für alle Wertepaare (β, r) richtig, die in den angegebenen Schranken liegen. Insbesondere folgt für das Paar $(0, r)$ die Identität:

$$U(1) = U(1)$$

Für alle weiteren Wertepaare außer $(0, r)$ fassen wir β und r als Funktionen zweier neuer Variablen z und y auf:

$$\beta(y, z) = \frac{(y-1)(z-1)}{y-z}; \quad r(y, z) = \frac{y-1}{y-z}$$

Dabei können wir z aus dem Intervall $[0, 1)$ und y aus dem Intervall $(1, +\infty)$ beliebig wählen. Durch Einsetzen in die obere Gleichung erhalten wir:

$$U(z) + (1-z)U'(z) = U(y) + (1-y)U'(y)$$

Da y und z innerhalb der angegebenen Intervalle unabhängig voneinander frei gewählt werden dürfen, sind beide Seiten dieser Gleichung gleichermassen unabhängig voneinander, woraus wir schließen können:

$$\forall z \in [0, 1): \quad U(z) + (1-z)U'(z) = U_c$$

$$\forall y \in (1, +\infty): \quad U(y) + (1-y)U'(y) = U_c$$

d.h. beide Seiten der Gleichung nehmen unabhängig voneinander stets den konstanten Wert U_c an. Ferner erhalten wir

für $x=1$ aus dem Ausdruck $U(x) + (1-x)U'(x)$ den Wert $U(1)$, was der für das Paar $(0,r)$ errechneten Lösung entspricht. Da U differenzierbar und somit stetig ist, folgt $U_0 = U(1)$, so daß wir für den gesamten Definitionsbereich der Nutzenfunktion U schließen:

$$\forall x \in [0, +\infty): U(x) + (1-x)U'(x) = U(1)$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach x , so folgt:

$$U'(x) - U'(x) + (1-x)U''(x) = 0$$

oder aber: $U''(x) = 0$ was die Linearität von U im gesamten Definitionsgebiet impliziert und zu beweisen war.

Unser Satz ergibt sich nun durch direkte Anwendung dieses Lemmas:

Wir erhalten für unsere vorgegebene Ausgangsverteilung X :

$$G_g(X) = Bq(k) \quad \text{mit } q(k) = \text{konstant}$$

$$W(X) = \frac{k}{n}U(1 - B\frac{n}{k}) + \frac{n-k}{n}U(1 + B\frac{n}{n-k})$$

wobei wir zur Vereinfachung die additiven Konstanten A_i gleich Null gesetzt haben. Ist W kompatibel mit G_g , so muß folglich W eindeutig negativ auf eine Zunahme des Ungleichheitskoeffizienten B reagieren und invariant bezüglich des Parameters k sein. Setzen wir $r = \frac{k}{n}$, so ist die letztere Forderung gleichbedeutend mit der Invarianz von W bezüglich r , wobei:

$$W(X) = rU(1 - \frac{B}{r}) + (1-r)U(1 + \frac{B}{1-r})$$

Gemäß unserem vorstehenden Lemma müssen in diesem Fall die individuellen Nutzenfunktionen $U(x_i)$ notwendigerweise linear in x_i sein. *

Stellen wir die lineare Funktion U durch ihre Maclaurinreihe (1) dar, so erhalten wir:

$$U(x_i) = U(0) + \frac{U'(0)}{1!} x_i$$

Für $x_i=1$ folgt unmittelbar: $U'(0)=U(1)-U(0)$ und damit:

$$U(x_i) = U(0) + [U(1) - U(0)] x_i$$

Bei Gleichverteilung der Einkommen der Ausgangsverteilung ($\beta=0!$) ergibt die Summe aus Achsenabschnitt $U(0)$ und Steigungsparameter $U(1)-U(0)$ gerade den Nutzen des Pro-Kopf-Einkommens $U(1)$.

Unter Benützung der so spezifizierten Nutzenfunktion U folgt für das Wohlfahrtsniveau der Ausgangsverteilung X :

$$\begin{aligned} W(X) &= \frac{k}{n} U(1 - \beta \frac{n}{k}) + \frac{n-k}{n} U(1 + \beta \frac{n}{n-k}) \\ &= \frac{k}{n} \left\{ U(0) + [U(1) - U(0)] (1 - \beta \frac{n}{k}) \right\} \\ &\quad + \frac{n-k}{n} \left\{ U(0) + [U(1) - U(0)] (1 + \beta \frac{n}{n-k}) \right\} = U(1) \end{aligned}$$

Wir erhalten daraus für alle $\beta' < \beta$:

$$W(X_{\beta'}) - W(X_{\beta}) = U(1) - U(1) = 0$$

woraus " $R_W(X_{\beta'}, X_{\beta})$ und $R_W(X_{\beta}, X_{\beta'})$ " folgt. Da andererseits:

$$G_g(X_{\beta'}) - G_g(X_{\beta}) = (\beta' - \beta) q(k) < 0$$

und damit " $R_{G_g}(X_{\beta}, X_{\beta'})$ und nicht $R_{G_g}(X_{\beta'}, X_{\beta})$ " gilt, ist W offensichtlich inkompatibel. Da W die einzige bezüglich k invariante Wohlfahrtsfunktion ist, haben wir somit die Nichtexistenz kompatibler utilitaristischer Wohlfahrtsfunktionen für alle linearen Verteilungsmaße mit konstanter Funktion $q(k)$ nachgewiesen.

(1) Zur Darstellung eines Polynoms durch seine Maclaurinreihe siehe etwa: A.C.Chiang, Fundamental Methods of Mathematical Economics, 2nd Ed., McGraw-Hill, Tokyo usw., 1974, S. 267 f.

Aus unseren Überlegungen folgen nun die Behauptungen:

Korollar: Es existiert keine mit dem Gini-Koeffizienten
kompatible utilitaristische Wohlfahrtsfunktion
(Theorem von Newbery) (1).

Beweis: Der Gini-Koeffizient G_p wird durch die strikt
monoton wachsende Gewichtsfunktion $g(p_i) = 2p_i - 1$
erzeugt. Damit ist $Dg(p_{i+1}) = \frac{2}{n}$, womit wir für
die Funktion $q(k)$ erhalten:

$$\begin{aligned} q(k) &= \left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \sum_{i=1}^k p_i Dg(p_{i+1}) + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{-1} \sum_{i=k+1}^{n-1} (1-p_i) Dg(p_{i+1}) \\ &= \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^k \frac{i}{k} + \sum_{i=k+1}^{n-1} \frac{n-i}{n-k} \right) \\ &= \frac{2}{n} \left(\sum_{i=1}^k \frac{i}{k} + \sum_{i=1}^{n-k-1} \frac{i}{n-k} \right) \\ &= \frac{2}{n} \left(\frac{(k+1)k}{2k} + \frac{(n-k-1)(n-k)}{2(n-k)} \right) \\ &= \frac{2}{n} \frac{n}{2} = 1 \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $q(k) = 1$ konstant für alle $\frac{k}{n} \in (0,1)$,
so daß nach dem vorhergehenden Satz keine mit dem Gini-
Koeffizienten kompatible utilitaristische Wohlfahrtsfunk-
tion existiert. Damit können dem Gini-Koeffizienten keine
utilitaristischen Wertvorstellungen zugrundeliegen.

(1) Newbery's Theorem lautet im Original:

"There exists no additive utility function which
ranks income distributions in the same order as
the Gini coefficient."

D.Newbery, A Theorem on the Measurement of Inequality,
a.a.O., S. 264

Damit verwendet Newbery implizit unser Konzept der
Kompatibilität.

Korollar: Es existiert keine mit der relativen mittleren Abweichung kompatible utilitaristische Wohlfahrtsfunktion.

Beweis: Die relative mittlere Abweichung wird im Fall der vorgegebenen Verteilung X durch die schwach monoton wachsende Gewichtsfunktion g mit:

$$g(p_i) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für } i = 1, 2, \dots, k \\ +\frac{1}{2} & \text{für } i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

erzeugt. Damit ist $Dg(p_{i+1}) = 0$ für alle $i \neq k$ und $Dg(p_{k+1}) = 1$. Daher folgt für die Funktion $q(k)$:

$$\begin{aligned} q(k) &= \left(\frac{k}{n}\right)^{-1} \sum_{i=1}^k p_i Dg(p_{i+1}) + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{-1} \sum_{i=k+1}^{n-1} (1-p_i) Dg(p_{i+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{i}{k} Dg(p_{i+1}) + \sum_{i=k+1}^{n-1} \frac{n-i}{n-k} Dg(p_{i+1}) \\ &= \frac{k}{k} = 1 \end{aligned}$$

Da $q(k) = 1$ konstant für alle $\frac{k}{n} \in (0, 1)$ ist, kann nach dem vorstehenden Satz keine mit der relativen mittleren Abweichung kompatible utilitaristische Wohlfahrtsfunktion existieren. Auch der relativen mittleren Abweichung können damit keine utilitaristischen Wertvorstellungen zugrundeliegen.

11.2. Kompatibilität und paretianische Wohlfahrtsfunktionen

Im vorstehenden Abschnitt hatten wir gezeigt, daß es keine mit der relativen mittleren Abweichung bzw. mit dem Gini-Koeffizienten kompatiblen utilitaristischen Wohlfahrtsfunktionen gibt. Ziehen wir jedoch die größte Klasse der paretianischen Wohlfahrtsfunktionen heran, so ist es im allgemeinen möglich, zum Gini-Koeffizienten bzw. zur relativen mittleren Abweichung kompatible Funktionen zu finden. Wir stellen dazu die Behauptung auf:

Behauptung: Die paretianische Wohlfahrtsfunktion w mit:

$$\begin{aligned} W(X) &= S(U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)) \\ &= H \left\{ \sum_{i=1}^n U^{-1} \left[\min \left\{ U(x_i), U \left(\sum_{j=1}^n U^{-1}(U(x_j)) \frac{1}{n} \right) \right\} \right] \right\} \end{aligned}$$

ist mit der relativen mittleren Abweichung kompatibel. Dabei ist die Funktion H strikt monoton wachsend.

Beweis: Wir benützen dazu die folgenden Vereinfachungen

$$\text{Zunächst ist: } U \left(\sum_{j=1}^n U^{-1}(U(x_j)) \frac{1}{n} \right) = U(m(X))$$

$$\text{Ferner gilt: } \min \{ U(x_i), U(m(X)) \} = U(\min \{ x_i, m(X) \})$$

$$\text{Schließlich ist: } \min \{ x_i, m(X) \} = \frac{x_i + m(X) - |x_i - m(X)|}{2}$$

Unter Berücksichtigung dieser Vereinfachungen und aus der Symmetrie der Wohlfahrtsfunktion W folgt:

$$W(X) = H \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_{(i)} + m(X) - |x_{(i)} - m(X)|) \right]$$

Ist keine Komponente des Verteilungsvektors X^0 gleich dem mittleren Einkommen, d.h. gilt $x_{(k)} < m(X) < x_{(k+1)}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} W(X) &= H \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (x_{(i)} + m(X) - (m(X) - x_{(i)})) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^n (x_{(i)} + m(X) - (x_{(i)} - m(X))) \right] \\ &= H \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k 2x_{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=k+1}^n 2m(X) \right] \\ &= H \left[(n-k)m(X) + \sum_{i=1}^k x_{(i)} \right] \end{aligned}$$

Sind umgekehrt r Komponenten ($r \geq 1$) des Verteilungsvektors X^0 gleich dem mittleren Einkommen, d.h. gilt:

$x_{(k)} < x_{(k+1)} = \dots = x_{(k+r)} = m(X) < x_{(k+r+1)}$, so folgt:

$$\begin{aligned} W(X) &= H \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k+r} (x_{(i)} + m(X) - (m(X) - x_{(i)})) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{i=k+r+1}^n (x_{(i)} + m(X) - (x_{(i)} - m(X))) \right] \\ &= H \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k+r} 2x_{(i)} + \frac{1}{2} \sum_{i=k+r+1}^n 2m(X) \right] \\ &= H \left[(n-k-r)m(X) + \sum_{i=1}^{k+r} x_{(i)} \right] \end{aligned}$$

oder aber, da $x_{(k+1)} = \dots = x_{(k+r)} = m(X)$ gilt:

$$w(X) = H \left[(n-k)m(X) + \sum_{i=1}^k x_{(i)} \right]$$

In beiden Fällen erhalten wir also für w den gleichen Ausdruck. Da die relative mittlere Abweichung in beiden Fällen gerade:

$$G_g(X) = \frac{k}{n} - M(X)^{-1} \sum_{i=1}^k x_{(i)}$$

beträgt, erhalten wir für durch Umformung:

$$w(X) = H \left[M(X) \left(1 - \left(\frac{k}{n} - M(X)^{-1} \sum_{i=1}^k x_{(i)} \right) \right) \right] \text{ oder:}$$

$$w(X) = H \left[M(X) (1 - G_g(X)) \right]$$

Diese Wohlfahrtsfunktion ist offensichtlich kompatibel mit der relativen mittleren Abweichung, da für alle Verteilungen mit der gleichen absoluten Merkmalssumme gilt:

$$\begin{aligned} R_w(X, Y) &\iff H \left[M(X) (1 - G_g(X)) \right] \geq H \left[M(Y) (1 - G_g(Y)) \right] \\ &\iff M(X) (1 - G_g(X)) \geq M(Y) (1 - G_g(Y)) \end{aligned}$$

da H strikt monoton wachsend ist!

$$\iff 1 - G_g(X) \geq 1 - G_g(Y)$$

da $M(X) = M(Y)$ nach Voraussetzung!

$$\iff G_g(Y) \geq G_g(X)$$

woraus $R_g(Y, X)$ folgt, was zu beweisen war.

Für den Gini-Koeffizienten $G_g(X) = M(X)^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i-n-1}{n} \right) x_{(i)}$

können wir die von Sheshinski getroffene Aussage (1) bestätigen:

Behauptung: Die paretianische Wohlfahrtsfunktion W mit:

$$\begin{aligned} W(X) &= S(U(x_1), U(x_2), \dots, U(x_n)) \\ &= H \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n U^{-1}(\min\{U(x_i), U(x_j)\}) \right] \end{aligned}$$

ist mit dem Gini-Koeffizienten kompatibel. Dabei ist die Funktion H strikt monoton wachsend.

Beweis: Zunächst benützen wir die Vereinfachungen

$$\min\{U(x_i), U(x_j)\} = U(\min\{x_i, x_j\})$$

$$\text{und: } \min\{x_i, x_j\} = \frac{x_i + x_j - |x_i - x_j|}{2}$$

Dann folgt daraus und aus der Symmetrie der Wohlfahrtsfunktion W :

$$w(X) = H \left[\frac{1}{2n} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (x_{(i)} + x_{(j)} - |x_{(i)} - x_{(j)}|) \right]$$

$$\text{Nun ist: } \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (x_{(i)} + x_{(j)} - |x_{(i)} - x_{(j)}|)$$

(1) Vgl. E. Sheshinski, Relation Between a Social Welfare Function and the Gini Index of Income Inequality, Journal of Economic Theory, Vol. 4, 1972, S. 98 f.

Siehe dazu auch: A. Kats, On the Social Welfare Function and the Parameters of Income Distribution, Journal of Economic Theory, Vol. 5, 1972, S. 377 f.

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sum_{i=1}^n x_{(1)} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_{(1)} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_{(2)} + 2 \sum_{i=1}^{n-2} x_{(2)} + \dots \\
 &+ 2 \sum_{i=1}^1 x_{(n)} + 2 \sum_{i=1}^0 x_{(n)} \\
 &= 2 \sum_{i=1}^n (2n + 1 - 2i) x_{(i)}
 \end{aligned}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Wohlfahrtsfunktion W ein, so erhalten wir:

$$W(X) = H \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2n + 1 - 2i) x_{(i)} \right]$$

oder aber nach algebraischer Umformung:

$$w(X) = H \left[M(X) (1 - M(X))^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i - n - 1}{n} \right) x_{(i)} \right]$$

Da sich der Gini-Koeffizient nach der Formel:

$$G_g(X) = M(X) \sum_{i=1}^n \left(\frac{2i - n - 1}{n} \right) x_{(i)}$$

errechnet, folgt daraus endgültig:

$$W(X) = H \left[M(X) (1 - G_g(X)) \right]$$

Auch diese Wohlfahrtsfunktion ist mit G_g kompatibel, da für alle Verteilungen mit der gleichen absoluten Merkmalssumme genau dann $H[M(X)(1 - G_g(X))] \geq H[M(Y)(1 - G_g(Y))]$ ist, wenn $G_g(Y) \geq G_g(X)$ gilt. Damit ist die Aussage $R_w(X, Y)$ genau dann wahr, wenn auch $R_{G_g}(Y, X)$ wahr ist, was zu beweisen war.

11.3. Kompatible Wohlfahrtsfunktionen und ihre Eigenschaften

Die in Abschnitt 11.2. mit dem Gini-Koeffizienten bzw. mit der relativen mittleren Abweichung kompatiblen parietianischen Wohlfahrtsfunktionen liessen sich beide in die Form:

$$W(X) = H \left[F(X) (1 - G_g(X)) \right]$$

bringen. Dies läßt eine Gesetzmäßigkeit vermuten, die wir durch den folgenden Satz bestätigen:

Satz: Gegeben sei ein beliebiges (1) lineares Verteilungsmaß G_g mit zumindest schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion g und eine soziale Wohlfahrtsfunktion W . Diese läßt sich genau dann in die Form

$$W(X) = H \left[F(X) (1 - G_g(X)) \right]$$

überführen, wobei H strikt wachsend ist, wenn sie die folgenden Eigenschaften (2) aufweist:

- a) $W(X) = H(W(X))$, d.h. W ist homothetisch.
- b) $W(X_g) = H(F(X))$, d.h. W ist im Fall der Gleichverteilung spezifisch normiert.
- c) $C(X) = G_g(X)$, d.h. der aus W abgeleitete normative Sen-Index C ist mit dem vorgegebenen linearen Verteilungsmaß identisch.

-
- (1) Wir setzen in diesem wie in den folgenden Sätzen dieses Abschnitts voraus, daß der Wertebereich des linearen Maßes G_g auf das Intervall $[0, 1]$ beschränkt ist. Diese Restriktion ist aber nicht schwerwiegend, da sich jedes beliebige Maß G_g durch Verwendung der Gewichtsfunktion

$$g^+(p_i) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} g(p_{i+1}) \right)^{-1} g(p_i)$$

in ein auf $[0, 1]$ normiertes Maß G_{g^+} transformieren läßt.

- (2) Ein mit unserem Satz verwandtes, jedoch durch anderes Vorgehen gefundenes Ergebnis findet sich auch bei: C. Blackorby und D. Donaldson, Measures of Relative Equality and Their Meaning in Terms of Social Welfare, a.a.O., S. 68

Beweis: Wir zeigen zunächst die Notwendigkeit der Eigenschaften a) - c):

Die Wohlfahrtsfunktion W ist homothetisch, wenn eine linear-homogene Repräsentation $\overset{\circ}{W}$ existiert mit $W = H(\overset{\circ}{W})$.

Aus $W(X) = H[\overline{M}(X)(1 - G_g(X))]$, wobei H strikt monoton wachsend ist, folgt nun zunächst:

$$H^{-1}(W(X)) = M(X)(1 - G_g(X))$$

Da jedes lineare Verteilungsmaß G_g homogen vom Grad Null in Bezug auf X ist und M linear homogen, so gilt:

$$\begin{aligned} \forall \lambda > 0: H^{-1}(W(\lambda X)) &= M(\lambda X)(1 - G_g(\lambda X)) \\ &= \lambda M(X)(1 - G_g(X)) \\ &= \lambda H^{-1}(W(X)) \end{aligned}$$

d.h. die Funktion $H^{-1}(W(X))$ ist linear homogen in X .

Setzen wir nun: $\overset{\circ}{W}(X) = H^{-1}(W(X))$, d.h. wir fassen

$M(X)(1 - G_g(X))$ als linear homogene Repräsentation von W

auf, so gilt offensichtlich: $W(X) = H(\overset{\circ}{W}(X))$, d.h. W ist

homothetisch und erfüllt damit Eigenschaft a).

Eigenschaft b) ergibt sich unmittelbar aus der Eigenschaft linearer Maße, für die extreme Gleichverteilung stets den Wert Null anzunehmen, woraus folgt:

$$W(X_g) = H[\overline{M}(X_g)(1 - G_g(X_g))] = H[\overline{M}(X)]$$

was zu beweisen war.

Die Notwendigkeit der Eigenschaft c) ergibt sich aus den folgenden Überlegungen:

Zunächst setzen wir wieder $\overset{\circ}{W}(X) = M(X)(1 - G_g(X))$.

Da offensichtlich $\overset{\circ}{W}(X_g) = M(X)$ gilt, so folgt:

$$\overset{\circ}{W}(X) = (1 - G_g(X))\overset{\circ}{W}(X_g)$$

Da weiterhin $\overset{\circ}{W}(X)$ linear homogen in X ist, so dürfen wir für diesen Ausdruck auch schreiben:

$$\overset{\circ}{W}(X) = \overset{\circ}{W}[(1 - G_g(X))X_g]$$

Wenden wir darauf die Funktion H an, so folgt:

$$H(\overset{\circ}{W}(X)) = H\left\{\overset{\circ}{W}[(1 - G_g(X))X_g]\right\} \text{ oder aber:}$$

$$W(X) = W[(1 - G_g(X))m(X), \dots, (1 - G_g(X))m(X)]$$

so daß wir für das verallgemeinerte Äquivalenzeinkommen

$$y^F(X) \text{ erhalten: } y^F(X) = (1 - G_g(X))m(X).$$

Aus der Definition des Sen-Index C mit (1):

$$C(X) = 1 - m(X)^{-1}y^F(X) \text{ resultiert dann:}$$

$$C(X) = 1 - m(X)^{-1}(1 - G_g(X))m(X) \text{ oder aber:}$$

$$C(X) = G_g(X) \text{ was zu beweisen war.}$$

Zur Suffizienz von a) - c) überlegen wir:

$$\text{Zunächst folgt aus c): } G_g(X) = 1 - m(X)^{-1}y^F(X)$$

was unmittelbar $y^F(X) = m(X)(1 - G_g(X))$ für das

(1) Vgl. dazu Abschnitt 9.2. dieser Arbeit.

Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung impliziert.

Aus der Definition von $\bar{y}^F(X)$ resultiert dann:

$$W(X) = W[m(X)(1 - G_g(X)), \dots, m(X)(1 - G_g(X))] \text{ oder}$$

$$W(X) = W[(1 - G_g(X))X_g]$$

Aus Eigenschaft a) folgt, daß eine linear homogene Repräsentation $\overset{\circ}{W}$ existiert mit $W = H(\overset{\circ}{W})$. Wir erhalten daher:

$$W(X) = H\left[\overset{\circ}{W}[(1 - G_g(X))X_{g-1}]\right] \text{ und da } \overset{\circ}{W} \text{ linear homogen ist:}$$

$$W(X) = H[(1 - G_g(X))\overset{\circ}{W}(X_g)]$$

Aus Eigenschaft b) folgt schließlich die Beziehung:

$$\overset{\circ}{W}(X_g) = H^{-1}[H(W(X_g))] = M(X)$$

so daß wir insgesamt:

$$W(X) = H[M(X)(1 - G_g(X))] \text{ erhalten, was zu beweisen}$$

war. Wir können also eine soziale Wohlfahrtsfunktion W genau dann in die Form $H[M(X)(1 - G_g(X))]$ überführen, wenn sie homothetisch und normiert ist und der aus ihr abgeleitete Sen-Index mit dem linearen Verteilungsmaß G_g identisch ist.

Ferner wollen wir festhalten:

Lemma: Die soziale Wohlfahrtsfunktion W mit der Gestalt:

$$W(X) = H[M(X)(1 - G_g(X))]$$

ist mit dem linearen Maß G_g kompatibel.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß H strikt monoton wachsend ist (1).

(1) Vgl. dazu auch Abschnitt 11.2. dieser Arbeit.

Nun stellen sich die beiden Fragen: Sind soziale Wohlfahrtsfunktionen des Typs $h[M(X)(1 - G_g(X))]$ die einzigen mit dem linearen Maß G_g kompatiblen Funktionen? Falls wir diese Frage verneinen müssen, so können wir anschließend untersuchen, ob $h[M(X)(1 - G_g(X))]$ der einzige kompatible Funktionstyp darstellt, wenn wir ausschließlich homothetische, normierte Funktionen heranziehen. Zur Beantwortung der ersten Frage stellen wir den folgenden Satz auf:

Satz: Sei W eine soziale Wohlfahrtsfunktion, die in X strikt wachsend ist und G_g ein lineares Verteilungsmaß mit zumindest schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion g . Dann sind folgende Aussagen einander äquivalent:

- a) Die Wohlfahrtsfunktion W ist mit dem linearen Maß G_g kompatibel.
- b) W ist allein als eine Funktion f der absoluten Merkmalssumme $M(X)$ und des linearen Maßes $G_g(X)$ darstellbar:

$$W(X) = f(M(X), G_g(X))$$

Dabei ist f in $M(X)$ strikt monoton wachsend und in $G_g(X)$ strikt monoton fallend.

- c) Das verallgemeinerte Äquivalenzeinkommen $y^H(X)$ ist allein als eine Funktion Φ der absoluten Merkmalssumme $M(X)$ und des linearen Maßes $G_g(X)$ darstellbar:

$$y^H(X) = \Phi(M(X), G_g(X))$$

Dabei ist Φ in $M(X)$ strikt monoton wachsend und in $G_g(X)$ strikt monoton fallend. Der Wertebereich der Funktion Φ ist auf das Intervall $[0, m(X)]$ beschränkt.

Beweis: Wir beweisen die Äquivalenz der Aussagen a) - c), indem wir die Richtigkeit der Implikationskette: $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$ zeigen.

$a) \Rightarrow b)$: Wir betrachten dazu zunächst alle Verteilungen $X \in \mathbb{R}_n^+$ mit der konstanten Merkmalssumme $M(X)$ und führen die Funktion $f_{M(X)}: \mathbb{R}_1^+ \rightarrow \mathbb{R}_1^+$ ein mit (1):

$$f_{M(X)}(G_g(X)) = w(X)$$

Dabei ist $f_{M(X)}$ in $G_g(X)$ strikt monoton fallend: wir betrachten zwei Verteilungen X und X' mit $M(X) = M(X')$, für die $G_g(X) > G_g(X')$ gilt. Die Kompatibilität von w impliziert dann die Ungleichung $w(X) < w(X')$, woraus unmittelbar:

$$f_{M(X)}(G_g(X)) < f_{M(X')}(G_g(X'))$$

folgt, was wir zeigen wollten. Nun definieren wir die Funktion $f: \mathbb{R}_1^+ \times \mathbb{R}_1^+ \rightarrow \mathbb{R}_1^+$ mit:

$$f(M(X), G_g(X)) = f_{M(X)}(G_g(X))$$

f ordnet also jedem Tupel $M(X), G_g(X)$ gerade den Wert $f_{M(X)}(G_g(X))$ zu. Da $f_{M(X)}(G_g(X)) = w(X)$ gilt, folgt daraus:

$$f(M(X), G_g(X)) = w(X)$$

Da $f_{M(X)}(G_g(X))$ in $G_g(X)$ strikt monoton fallend ist, so ist es auch $f(M(X), G_g(X))$. Ferner ist $f(M(X), G_g(X))$ in $M(X)$ strikt monoton wachsend:

(1) $f_{M(X)}$ darf zulässig als Funktion bezeichnet werden, da für alle X, X' mit $G_g(X) = G_g(X')$ aus der Kompatibilität von w unmittelbar $w(X) = w(X')$ und damit $f_{M(X)}(G_g(X)) = f_{M(X')}(G_g(X'))$ folgt.

Da W in X strikt wachsend ist, folgt zunächst für $\forall 1 > 1$:

$$f(M(X), G_g(X)) = W(X) < W(1X) = f(M(1X), G_g(1X))$$

Nun ist G_g in X homogen vom Grad Null und $M(X)$ in X linear homogen, so daß wir erhalten:

$$f(M(1X), G_g(1X)) = f(1M(X), G_g(X))$$

Setzen wir dies in die obere Ungleichung ein, so folgt:

$$\forall 1 > 1: f(M(X), G_g(X)) < f(1M(X), G_g(X))$$

was zu beweisen war.

b) $\Rightarrow$ c): Wir gehen dazu von der Definition des verallgemeinerten Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung aus:

$$W(y^F(X), \dots, y^F(X)) = W(X)$$

Da aber: $W(X) = f(M(X), G_g(X))$ gilt, so folgt:

$$f(ny^F(X), 0) = f(M(X), G_g(X))$$

Wir führen nun die Funktion $f_0: \mathbb{R}_1^+ \rightarrow \mathbb{R}_1^+$ ein mit:

$$f_0(ny^F(X)) = f(ny^F(X), 0)$$

Da f in $M(X)$ strikt monoton wachsend ist, so ist es auch die Funktion f_0 in $ny^F(X)$. Damit existiert die inverse f_0^{-1}

$$\text{so daß wir: } ny^F(X) = f_0^{-1}[f(M(X), G_g(X))]$$

$$\text{oder aber: } y^F(X) = \frac{1}{n} f_0^{-1}[f(M(X), G_g(X))] \text{ erhalten.}$$

$$\text{Setzen wir: } \Phi(M(X), G_g(X)) = \frac{1}{n} f_0^{-1}[f(M(X), G_g(X))], \text{ so}$$

$$\text{folgt: } y^F(X) = \Phi(M(X), G_g(X))$$

Da Φ aus einer monotonen Transformation von f hervorgeht,

ist Φ ebenfalls in $M(X)$ strikt wachsend und in $G_g(X)$ strikt monoton fallend.

Aus der Schreibweise: $\Phi(M(X), G_g(X)) = \frac{1}{n} f_0^{-1}(W(X))$ folgt die Ungleichung: $\Phi(M(X), G_g(X)) \geq 0$, da $W(X)$ stets positiv ist und f_0^{-1} einen nichtnegativen Wertebereich besitzt.

Für die extreme Gleichverteilung X_g erhalten wir zudem:

$$\begin{aligned}\Phi(M(X_g), G_g(X_g)) &= \frac{1}{n} f_0^{-1}[f(M(X_g), 0)] \\ &= \frac{1}{n} f_0^{-1}[f_0(M(X))] \\ &= \frac{1}{n} M(X) = m(X)\end{aligned}$$

Da stets $W(X) \leq W(X_g)$ und damit $f(M(X), G_g(X)) \leq f(M(X), 0)$ gilt, ist folglich der Wertebereich der Funktion Φ wie behauptet mit dem Intervall $[0, m(X)]$ identisch.

c) $\Rightarrow$ a): Aus $y^F(X) = \Phi(M(X), G_g(X))$ und der Definition des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung folgt:

$$W(X) = w[\Phi(M(X), G_g(X)), \dots, \Phi(M(X), G_g(X))]$$

Da Φ strikt monoton abnehmend in $G_g(X)$ und W strikt wachsend in X ist, ist offensichtlich für zwei beliebige Verteilungen X und Y mit $M(X) = M(Y)$ die Aussage: $G_g(Y) \geq G_g(X)$ äquivalent mit der Aussage:

$$w[\Phi(M(X), G_g(X)), \dots, \Phi(., .)] \geq w[\Phi(M(Y), G_g(Y)), \dots, \Phi(., .)]$$

oder aber: $W(X) \geq W(Y)$, d.h. W ist mit dem linearen Maß G_g kompatibel, was zu beweisen war.

Unser Satz beantwortet unsere erste Frage also eindeutig negativ. Kompatibilität ist lediglich notwendig und hinreichend dafür, daß wir sowohl die soziale Wohlfahrtsfunktion $W(X)$ als auch das verallgemeinerte Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung $y^E(X)$ allein als eine Funktion der absoluten Merkmalssumme $M(X)$ und des zugrundegelegten linearen Maßes $G_g(X)$ darstellen können, wobei diese in $M(X)$ strikt monoton wachsend und in $G_g(X)$ strikt monoton fallend sind. Die Klasse aller Wohlfahrtsfunktionen mit diesen Eigenschaften ist offensichtlich beträchtlich größer als die darin enthaltene Teilmenge aller Wohlfahrtsfunktionen der Bauart $H[M(X)(1 - G_g(X))]$.

Wenden wir uns nun dem zweiten Problemkreis zu und fragen: Ist $H[M(X)(1 - G_g(X))]$ dann wenigstens der einzige mit G_g kompatible Funktionstyp, wenn wir von vornherein die Menge aller zulässigen Wohlfahrtsfunktionen auf normierte und homothetische Funktionen beschränken. Die Antwort darauf gibt uns der folgende Satz:

Satz: Sei G_g ein lineares Verteilungsmaß mit zumindest schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion g und W eine soziale Wohlfahrtsfunktion mit den Eigenschaften:

- $W(X) = H(W(X))$, d.h. W ist homothetisch
- $W(X_g) = H(M(X))$, d.h. W unterliegt für den Fall der Gleichverteilung einer spezifischen Normierung.

Dann sind die folgenden Aussagen einander äquivalent:

a) Die Wohlfahrtsfunktion W ist mit dem linearen Maß G_g kompatibel.

b) Es existieren Funktionen H und Γ , so daß wir W darstellen können mit:

$$W(X) = H[M(X)\Gamma(G_g(X))]$$

Dabei ist H strikt monoton wachsend und Γ strikt monoton fallend. Weiterhin ist der Wertebereich von Γ auf das Intervall $[0,1]$ beschränkt.

c) Zwischen dem aus W abgeleiteten normativen Sen-Index und dem linearen Verteilungsmaß G_g besteht die Beziehung:

$$C(X) = 1 - \Gamma(G_g(X))$$

d.h. C geht aus einer eindeutig umkehrbaren Transformation des linearen Verteilungsmaßes G_g hervor.

Beweis: Wir demonstrieren wiederum die Richtigkeit der Implikationskette: $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow a)$.

$a) \Rightarrow b)$: Da W mit G_g kompatibel ist und voraussetzungsgemäß homothetisch ist, so folgt die Existenz einer in X linear homogenen Repräsentation $\overset{0}{W}$ mit:

$$\overset{0}{W}(X) = H^{-1}[f(M(X), G_g(X))]$$

Da G_g in X homogen vom Grad Null und $M(X)$ in X linear homogen ist, erhalten wir für alle $\lambda > 0$:

$$\lambda H^{-1}[f(M(X), G_g(X))] = H^{-1}[f(\lambda M(X), G_g(X))]$$

d.h. wir können $H^{-1}[f(M(X), G_g(X))]$ als in $M(X)$ linear homogen auffassen. Dies ist aber gleichbedeutend damit, daß wir $M(X)$ multiplikativ

herausziehen können, so daß wir für $\overset{0}{W}$ erhalten:

$$\overset{0}{W}(X) = H^{-1}[\overset{0}{f}(M(X), G_g(X))] = M(X) \Gamma(G_g(X))$$

Da $\overset{0}{f}(M(X), G_g(X))$ in $G_g(X)$ strikt monoton fallend ist, so ist es auch $H^{-1}[\overset{0}{f}(M(X), G_g(X))]$ und damit $\Gamma(G_g(X))$. Weiterhin gilt für alle $X \in \mathbb{R}_n^+$: $\Gamma(G_g(X)) \geq 0$, da $M(X)$ niemals negativ werden kann und die Wohlfahrtsfunktion W definitionsgemäß einen positiven Wertebereich aufweist.

Aus der Normierung $W(X_g) = H(M(X))$ folgt unmittelbar $\overset{0}{W}(X_g) = M(X)$, woraus wir $\Gamma(G_g(X_g)) = 1$ erhalten. Unter Berücksichtigung der Ungleichung $\overset{0}{W}(X) \leq W(X_g)$ resultiert somit für alle $X \in \mathbb{R}_n^+$: $\Gamma(G_g(X)) \in [0, 1]$.

Unter Anwendung der Funktion H erhalten wir endgültig:

$$\overset{0}{W}(X) = H[M(X) \Gamma(G_g(X))]$$

wobei H strikt monoton wachsend und Γ strikt monoton fallend ist und einen auf das Intervall $[0, 1]$ beschränkten Wertebereich besitzt.

b) $\Rightarrow$ c): Wir setzen $\overset{0}{W}(X) = M(X) \Gamma(G_g(X))$. Zusammen mit der linearen Homogenität von $\overset{0}{W}$ folgt aus der Normierungsgleichung $\overset{0}{W}(X_g) = M(X)$:

$$\overset{0}{W}(X) = \overset{0}{W}[\Gamma(G_g(X)) X_g]$$

und unter Anwendung der Transformation H :

$$W(X) = H\left\{\overset{0}{W}[\Gamma(G_g(X)) X_g]\right\} \text{ oder:}$$

$$\overset{0}{W}(X) = \overset{0}{W}[\Gamma(G_g(X)) m(X), \dots, \Gamma(G_g(X)) m(X)]$$

Daraus folgt für das verallgemeinerte Äquivalenzeinkommen

bei Gleichverteilung $y^F(X)$:

$$y^F(X) = \Gamma(G_g(X))m(X)$$

woraus für den Sen-Index unmittelbar:

$$C(X) = 1 - \Gamma(G_g(X))$$

resultiert, was zu beweisen war.

c) $\Rightarrow$ a): Aus $C(X) = 1 - \Gamma(G_g(X))$ folgt zunächst:

$$y^F(X) = \Gamma(G_g(X))m(X). \text{ Weiterhin impliziert die}$$

Homothetie die Gültigkeit der Beziehung (1):

$$y^F(X) = \overset{\circ}{w}(1,1,\dots,1)^{-1}\overset{\circ}{w}(X)$$

Durch Zusammenfassung der beiden Gleichungen erhalten wir:

$$\overset{\circ}{w}(X) = \overset{\circ}{w}(1,1,\dots,1)m(X)\Gamma(G_g(X)) \quad \text{oder:}$$

$$\overset{\circ}{w}(X) = \overset{\circ}{w}[\Gamma(G_g(X))X_g]$$

woraus aus der Normierung von W und unter Anwendung der Transformation H folgt:

$$w(X) = H[M(X)\Gamma(G_g(X))]$$

Setzen wir nun:

$$f(M(X), G_g(X)) = H[M(X)\Gamma(G_g(X))]$$

wobei f in $M(X)$ strikt monoton wachsend und in $G_g(X)$ strikt monoton fallend ist, so folgt aus der Existenz der Funktion f , daß W mit G_g wie behauptet kompatibel ist.

(1) Vgl. dazu Abschnitt 9.2. dieser Arbeit.

Fassen wir an dieser Stelle unsere Überlegungen zusammen: Beschränken wir uns auf normierte, homothetische soziale Wohlfahrtsfunktionen, so ist eine Wohlfahrtsfunktion W genau dann mit einem linearen Maß G_g kompatibel, wenn sie die Form $H[M(X)\Gamma(G_g(X))]$ aufweist bzw. wenn zwischen dem aus ihr abgeleiteten normativen Sen-Index und dem Maß G_g der Zusammenhang $C(X) = 1 - \Gamma(G_g(X))$ besteht.

Da durch den Ausdruck $H[M(X)\Gamma(G_g(X))]$ bzw. durch die Vorschrift $C(X) = 1 - \Gamma(G_g(X))$ eine ganze Klasse von sozialen Wohlfahrtsfunktionen spezifiziert wird, müssen wir auch die zweite eingangs gestellte Frage verneinen, d.h. einem linearen Maß G_g können wir stets eine Vielzahl normierter homothetischer, kompatibler Wohlfahrtsfunktionen zuordnen, die sich nicht nur in der strikt monoton wachsenden Transformation H sondern auch in der strikt monoton abnehmenden Funktion Γ voneinander unterscheiden.

Stellen wir allein auf Funktionen des Typs $H[M(X)(1-G_g(X))]$ ab, so ist dafür das lediglich ordinale Konzept der Kompatibilität nicht hinreichend. Wir müssen dazu die Funktion Γ näher bestimmen: Wir erhalten $H[M(X)(1-G_g(X))]$ genau dann, wenn wir $\Gamma(G_g(X)) = 1 - G_g(X)$ oder äquivalent damit $C(X) = G_g(X)$ setzen. Unter dieser zusätzlichen Annahme ist $H[M(X)(1-G_g(X))]$ der einzige mit G_g kompatible Funktionstypus.

Fordern wir schließlich, daß H die identische Abbildung bzw. daß W linear homogen in X ist, so weist die einzige mit G_g kompatible linear homogene Wohlfahrtsfunktion W die Gestalt $M(X)(1-G_g(X))$ auf.

Verzichten wir jedoch auf diese zusätzlichen restriktiven Annahmen, so müssen wir alle wohlfahrtsfunktionen der Bauart $\pi[M(X)\Gamma(G_g(X))]$ heranziehen, wenn wir nach der Menge aller mit einem linearen Maß G_g kompatiblen, normierten und homothetischen sozialen Wohlfahrtsfunktionen fragen. Diese Vielfalt wäre aber nicht weiter von Belang, wenn alle wohlfahrtsfunktionen diesen Typs ordinal äquivalent wären, d.h. ließe sich für zwei beliebige Funktionen $\pi[M(X)\Gamma(G_g(X))]$ und $\pi^+[M(X)\Gamma^+(G_g(X))]$ jeweils eine geeignete Transformation Ψ angeben, so daß:

$$\pi^+[M(X)\Gamma^+(G_g(X))] = \Psi\{\pi[M(X)\Gamma(G_g(X))]\}$$

gilt. Dies ist aber offensichtlich nur für den Spezialfall $\Gamma = \Gamma^+$ der Fall mit $\Psi = H^+(H^{-1})$, d.h. für unterschiedliche Funktionen Γ sind die entsprechenden wohlfahrtsfunktionen nicht ordinal äquivalent. Ein Beispiel mag diesen Sachverhalt verdeutlichen:

Wählen wir zunächst für H die identische Abbildung und setzen $\Gamma(G_g(X)) = 1 - G_g(X)$, so erhalten wir die schon bekannte linear homogene Wohlfahrtsfunktion:

$$w(X) = \pi(X)(1 - G_g(X))$$

Eine zweite mit G_g kompatible Wohlfahrtsfunktion bestimmen wir mit $H(.) = \ln(.)$ und $\Gamma(G_g(X)) = \exp(-G_g(X))$:

$$\begin{aligned} w(X) &= \ln M(X) \exp(-G_g(X)) \\ &= \ln M(X) - G_g(X) \end{aligned}$$

Diese homothetische Wohlfahrtsfunktion ist durch keine Transformation in die Form $M(X)(1 - G_g(X))$ überführbar

Finden wir schon in der Teilmenge aller normierten homothetischen Wohlfahrtsfunktionen ordinal unterschiedliche Funktionen, so ist dies erst recht für die Klasse aller kompatiblen Wohlfahrtsfunktionen des Typs $f(M(X), G_g(X))$ der Fall. Immerhin läßt sich eine sowohl notwendige wie auch hinreichende Bedingung für ordinale Äquivalenz angeben:

Satz: Gegeben seien ein lineares Verteilungsmaß G_g und die beiden mit G_g kompatiblen Wohlfahrtsfunktionen $W(X) = f(M(X), G_g(X))$ und $W^+(X) = f^+(M(X), G_g(X))$. Die Wohlfahrtsfunktion W^+ ist genau dann mit der Wohlfahrtsfunktion W ordinal äquivalent, wenn für alle Verteilungen $X \in \mathbb{R}_n^+$ gilt:

$$y_+^F(X) = y^F(X)$$

d.h. die beiden verallgemeinerten Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung sind stets einander gleich.

Beweis: Für den Beweis gehen wir zunächst von der Definitionsgleichung des verallgemeinerten Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung aus. Wir erhalten für die Wohlfahrtsfunktion W^+ daraus:

$$f^+(ny_+^F(X), 0) = f^+(M(X), G_g(X))$$

Da W^+ mit W ordinal äquivalent ist, existiert folglich eine strikt wachsende Funktion φ , so daß $W^+(X) = \varphi[W(X)]$ gilt. Damit können wir für

die obere Gleichung schreiben:

$$\Psi[f(ny_+^F(X), 0)] = \Psi[f(M(X), G_g(X))]$$

Unter Anwendung der Inversen Ψ^{-1} erhalten wir daraus:

$$f(ny_+^F(X), 0) = f(M(X), G_g(X))$$

und weiter durch Benützung der Funktionen f_0 und f_0^{-1} :

$$y_+^F(X) = \frac{1}{n} f_0^{-1}[f(M(X), G_g(X))]$$

Berücksichtigen wir, daß gerade $y^F(X) = \frac{1}{n} f_0^{-1}[f(M(X), G_g(X))]$ gilt, so erhalten wir unmittelbar:

$$y_+^F(X) = y^F(X)$$

was wir zeigen wollten. Zum Beweis der Suffizienz überlegen wir, daß offensichtlich:

$$y^F(X) = \frac{1}{n} f_0^{-1}(w(X)) \quad \text{bzw.}$$

$$y_+^F(X) = \frac{1}{n} f_0^{+-1}(w^+(X))$$

gelten muß. Aus $y^F(X) = y_+^F(X)$ folgt dann:

$$f_0^{+-1}(w^+(X)) = f_0^{-1}(w(X))$$

und unter Anwendung der Funktion f_0^+ :

$$w^+(X) = f_0^+[f_0^{-1}(w(X))]$$

Definieren wir die strikt monoton wachsende Transformation Ψ mit: $\Psi(.) = f_0^+[f_0^{-1}(.)]$, so folgt:

$$w^+(X) = \Psi[w(X)]$$

was gerade zu beweisen war.

Anschließend wollen wir die Konkavitätseigenschaften kompatibler Wohlfahrtsfunktionen herausarbeiten. Wir halten dazu fest:

Lemma: Gegeben sei das lineare Verteilungsmaß ν_g und eine mit G_g kompatible Wohlfahrtsfunktion W .
Dann ist W eingeschränkt quasikonkav, d.h. für alle Verteilungen $X, Y \in \mathbb{R}_n^+$ mit $M(X) = M(Y)$ gilt:

$$\forall \beta \in [0, 1]: W(\beta X + (1-\beta)Y) \geq W(Y), \text{ falls } W(X) \geq W(Y)$$

Beweis: Zunächst folgt aus der Voraussetzung $W(X) \geq W(Y)$ die Ungleichung $G_g(X) \leq G_g(Y)$, weil W mit G_g kompatibel ist.

Da nun jedes lineare Verteilungsmaß eingeschränkt quasikonvex ist (1), so resultiert für alle $\beta \in [0, 1]$:

$$G_g(\beta X + (1-\beta)Y) \leq G_g(Y)$$

woraus unmittelbar:

$$f(M(X), G_g(\beta X + (1-\beta)Y)) \geq f(M(Y), G_g(Y))$$

folgt. Da die Voraussetzung $M(X) = M(Y)$ die Beziehung $M(\beta X + (1-\beta)Y) = M(X)$ impliziert, so folgt:

$$f(M(\beta X + (1-\beta)Y), G_g(\beta X + (1-\beta)Y)) \geq f(M(Y), G_g(Y))$$

woraus unmittelbar

$$W(\beta X + (1-\beta)Y) \geq W(Y)$$

folgt, was zu beweisen war.

(1) Vgl. dazu Abschnitt 4.2. dieser Arbeit.

Neben dieser Eigenschaft gilt speziell für die linear homogene Wohlfahrtsfunktion $W(X) = M(X)(1 - G_g(X))$:

Lemma: Gegeben sei das lineare Verteilungsmaß G_g und die mit G_g kompatible linear homogene Wohlfahrtsfunktion $W(X) = M(X)(1 - G_g(X))$.

Dann ist W uneingeschränkt konkav, d.h. es gilt:

$$\forall X, Y \in R_n^+ \text{ und } \forall \beta \in [0, 1]:$$

$$W(\beta X + (1-\beta)Y) \geq \beta W(X) + (1-\beta)W(Y)$$

Beweis: Wir definieren dazu die neue Verteilung Z mit:

$Z = \beta X + (1-\beta)Y$. Dann müssen wir zeigen, daß die Ungleichung für alle Verteilungen X, Y gilt:

$$M(Z)(1-G_g(Z)) \geq \beta M(X)(1-G_g(X)) + (1-\beta)M(Y)(1-G_g(Y))$$

Da für die absolute Merkmalssumme der Verteilung Z $M(Z) = \beta M(X) + (1-\beta)M(Y)$ gilt, so können wir vereinfacht schreiben:

$$M(Z)G_g(Z) \leq \beta M(X)G_g(X) + (1-\beta)M(Y)G_g(Y)$$

was unmittelbar auf die Ungleichung:

$$\sum_{i=1}^n z_{(i)}g(p_i) \leq \beta \sum_{i=1}^n x_{(i)}g(p_i) + (1-\beta) \sum_{i=1}^n y_{(i)}g(p_i)$$

führt. Diese Ungleichung wird aber von jedem linearen Verteilungsmaß mit zumindest schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion erfüllt (1), woraus unsere Behauptung:

$$W(\beta X + (1-\beta)Y) \geq \beta W(X) + (1-\beta)W(Y)$$

für $W(X) = M(X)(1-G_g(X))$ bewiesen wäre.

(1) Vgl. dazu Abschnitt 4.2. dieser Arbeit.

Für diesen linear homogenen Funktionstypus wollen wir abschließend die Auswirkungen marginaler Einkommensänderungen analysieren:

Zunächst erhalten wir als explizite Darstellung für ein beliebiges Maß G_g aus $W(X) = M(X)(1 - G_g(X))$:

$$W(X) = \sum_{i=1}^n x_{(i)}(1-g(p_i)) = m(X) \sum_{i=1}^n g(p_i)$$

Jede linear homogene kompatible Wohlfahrtsfunktion läßt sich also als gewogene Summe geordneter Einkommen darstellen, wobei die Gewichte $1-g(p_i)$ zumindest schwach monoton fallend sind. Die durch einen infinitesimalen Einkommenszuwachs resultierende Wohlfahrtsänderung (1)

$$W'_{(i)}(X^0) = 1 - g(p_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(p_i)$$

ist stets positiv, da aus der vorausgesetzten Normierung $G_g(X) \in [0,1]$ die Ungleichung (2):

$$1 - g(p_n) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(p_i) \geq 0$$

folgt und $1-g(p_i)$ für $i = n$ minimal ist. Ist g strikt monoton wachsend, so ist der Wohlfahrtszuwachs umso höher, je niedriger die Rangzahl des marginal variierten Einkommens ist. Damit ist die Grenzrate der Substitution zwischen regelmäßig benachbarten Einkommensempfängern

$$-\frac{dx_{(k-1)}}{dx_{(k)}} = \frac{1 - g(p_k) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(p_i)}{1 - g(p_{k-1}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(p_i)}$$

stets kleiner Eins. Im Falle einer lediglich schwach monoton wachsenden Gewichtsfunktion kann die Grenzrate auch den Wert Eins erreichen.

(1) $W(X^0)$ ist nicht für $x_{(i-1)}=x_{(i)}=x_{(i+1)}$ differenzierbar, da sich an solchen "switch points" die Rangordnung ändert. In solchen Fällen ist auch die Grenzrate der Substitution undefiniert.

(2) Da in diesem Fall $G_g(X_u) = g(p_n) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(p_i) \leq 1$ gilt.

Das Indifferenzkurvensystem hat dann folgendes Aussehen:

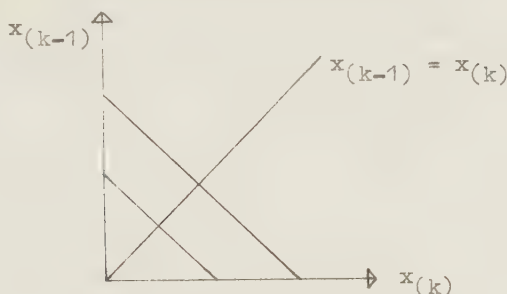


Abb. 4a: Indifferenzkurvensystem für $-\frac{dx_{(k-1)}}{dx_{(k)}} = 1$

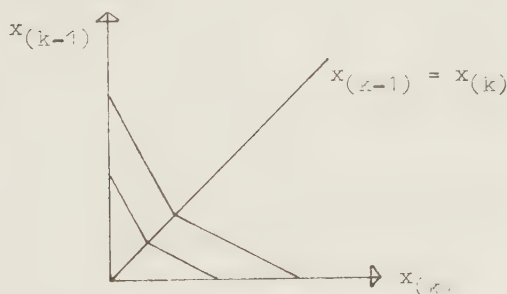


Abb. 4b: Indifferenzkurvensystem für $-\frac{dx_{(k-1)}}{dx_{(k)}} < 1$

Die Wohlfahrtsfunktion $w(X) = M(X)(1-G_g(X))$ ist damit nicht nur bezüglich des Ursprungs homothetisch, sondern auch bezüglich jeden anderen Punktes auf dem Gleichheitsstrahl $x_{(k-1)} = x_{(k)}$ (1). Mit anderen Worten: Die Grenzrate der Substitution ist nicht nur in den Schnittpunkten, die eine vom Ursprung ausgehende Gerade mit den Indifferenzkurven bildet, gleich, sondern auch in den Schnittpunkten, die wir aus Geraden erhalten, die von einem beliebigen anderen Punkt der Gleichheitsgerade $x_{(k-1)} = x_{(k)}$ beginnen.

(1) Für den Spezialfall des Gini-Gleichheitsindex findet sich dieses Ergebnis auch in: C.Blackorby und D.Donaldson, Measures of Relative Equality and Their Meaning in Terms of Social Welfare, a.a.O., S. 75 f.

Ist die Gewichtsfunktion g strikt monoton wachsend, so ist die Steigung der Indifferenzkurven eine zunehmende Funktion der zugeordneten Rangzahlen, d.h. höhere Rangzahlen implizieren stets größere Grenzzraten der Substitution. Allgemein erhalten wir:

$$0 < -\frac{dx_{(1)}}{dx_{(2)}} < -\frac{dx_{(k-1)}}{dx_{(k)}} < -\frac{dx_{(n-1)}}{dx_{(n)}} < 1$$

Für lediglich schwach monoton wachsende Gewichtsfunktionen läßt sich eine ähnliche Beziehung nicht herleiten (1).

Aus diesen generellen Überlegungen erhalten wir explizit für die in Kapitel 5 angeführten linearen Maße folgende Ergebnisse:

1) Relative Spannweite:

Als linear homogene normierte Wohlfahrtsfunktion erhalten wir:

$$w(X) = 2x_{(1)} + \sum_{i=2}^{n-1} x_{(i)}$$

Ein infinitesimaler Einkommenszuwachs führt damit zu:

$$w'_{(1)}(X^0) = 2$$

$$w'_{(i)}(X^0) = 1 \quad \text{für } i = 2, \dots, n-1$$

Damit folgt für die Grenzrate der Substitution:

$$-\frac{dx_{(1)}}{dx_{(2)}} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{dx_{(k-1)}}{dx_{(k)}} = 1 \quad \text{für } k = 3, \dots, n-1$$

(1) Siehe dazu die anschließend für die relative mittlere Abweichung ermittelten Ergebnisse.

2) Relative mittlere Abweichung:

Wir unterscheiden wieder zwei Fälle:

Fall 1: Keine Komponente des Verteilungsvektors X^0 entspricht dem Durchschnittseinkommen $m(X)$, d.h. es gelte $x_{(k)} < m(X) < x_{(k+1)}$.

Als linear homogene normierte Wohlfahrtsfunktion ergibt sich (1):

$$W(X) = (n-k)m(X) + \sum_{i=1}^k x_{(i)}$$

Ein marginaler Einkommenszuwachs führt demnach zu:

$$w'_{(i)}(X^0) = \frac{2n-k}{n} \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

$$w'_{(i)}(X^0) = \frac{n-k}{n} \quad \text{für } i = k+1, \dots, n$$

Die entsprechenden Grenzraten der Substitution lauten dann:

$$-\frac{dx_{(i-1)}}{dx_{(i)}} = 1 \quad \text{für } i = 2, \dots, k$$
$$i = k+2, \dots, n$$

$$-\frac{dx_{(k)}}{dx_{(k+1)}} = \frac{n-k}{2n-k}$$

Fall 2: Es sind insgesamt r ($r=1$) Komponenten des Verteilungsvektors X^0 gleich dem mittleren Einkommen $m(X)$, d.h. es gelte:

$$x_{(k)} < x_{(k+1)} = \dots = x_{(k+r)} = m(X) < x_{(k+r+1)}$$

Als linear homogene normierte Wohlfahrtsfunktion erhalten wir diesmal unter expliziter Berücksichtigung der r mit dem mittleren Einkommen identischen Komponenten(2):

$$W(X) = (n-k-r)m(X) + \sum_{i=1}^{k+r} x_{(i)}$$

(1) Siehe dazu auch Abschnitt 11.2. dieser Arbeit.

(2) Ansonsten wäre die ceteris paribus Bedingung verletzt.

Die partiellen Ableitungen lauten damit:

$$w'_{(i)}(X^0) = \frac{2n-k-r}{n} \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

$$w'_{(i)}(X^0) = \frac{n-k-r}{n} \quad \text{für } i = k+r+1, \dots, n$$

Damit folgt für die Grenzrate der Substitution:

$$-\frac{dx_{(i-1)}}{dx_{(i)}} = 1 \quad \text{für } i = 2, \dots, k \\ i = k+r+2, \dots, n$$

3) Gini-Koeffizient:

Als linear homogene Wohlfahrtsfunktion ergibt sich (1):

$$W(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2n+1-2i)x_{(i)}$$

Aus einem marginalen Einkommenszuwachs resultiert:

$$w'_{(i)}(X^0) = 2 + \frac{1}{n} - \frac{2i}{n} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Für die erste partielle Ableitung gilt damit stets Abschätzung:

$$\frac{1}{n} \leq w'_{(i)}(X^0) \leq \frac{2n-1}{n} \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Die Grenzrate der Substitution errechnet sich dann zu:

$$-\frac{dx_{(k-1)}}{dx_{(k)}} = \frac{2n+1-2k}{2n-1-2k} < 1 \quad \text{für } k = 2, \dots, n$$

Als Abschätzung der Grenzrate der Substitution erhalten wir daraus:

$$\frac{1}{3} \leq -\frac{dx_{(k-1)}}{dx_{(k)}} \leq \frac{2n-3}{2n-1} \quad \text{für } k = 2, \dots, n$$

(1) Diese Funktion ist bis auf den Normierungsfaktor n^{-1} mit der von Blackorby und Donaldson für den Gini-Gleichheitsindex ermittelten Wohlfahrtsfunktion identisch. Vgl. C. Blackorby und D. Donaldson, Measures of Relative Equality and Their Meaning in Terms of Social Welfare, a.a.O., S. 69

Damit können wir, wie auch Blackorby und Donaldson (1), folgende von Sen geäußerte Vermutung widerlegen (2):

"Thus the rate of substitution between the persons with the i -th highest income and the one with the j -th highest income is simply j/i ."

Weiterhin können wir das von Blackorby und Donaldson gewählte Beispiel bestätigen (3):

"For example, in a three-person society the worst-off person gets five times the weight of the best-off person and the intermediate person gets three times the weight of the best-off person."

Schließlich ist diese Funktion, wie auch alle anderen linear homogenen Versionen, in X konkav aber nicht strikt konkav (4).

4) Lorenz-Koeffizient:

Wir erhalten als linear homogene Wohlfahrtsfunktion:

$$W(X) = \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k x_{(i)}$$

Für infinitesimale Einkommensänderungen folgt:

$$W'_{(i)}(X^0) = \frac{n}{k} \quad \text{für } i = 1, \dots, k$$

Als Grenzrate der Substitution ergibt sich schließlich:

$$-\frac{dx_{(i-1)}}{dx_{(i)}} = 1 \quad \text{für } i = 2, \dots, k$$

-
- (1) Vgl. C.Blackorby und D.Donaldson, Measures of Relative Equality and Their Meaning in Terms of Social Welfare, a.a.O., S. 69
 - (2) A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 32
 - (3) C.Blackorby und D.Donaldson, Measures of Relative Equality and Their Meaning in Terms of Social Welfare, a.a.O., S. 69
 - (4) Vgl. A.K.Sen, On Economic Inequality, a.a.O., S. 33 f.

Literaturverzeichnis:

- D.J. Aigner
A.J. Heins A Social Welfare View of the
Measurement of Income Equality,
The Review of Income and Wealth,
Vol. 13, 1967, S. 12-25
- M.G. Allingham The Measurement of Inequality,
Journal of Economic Theory,
Vol. 5, 1972, S. 163-169
- C. d'Aspremont
L. Gevers Equity and the Informational Basis
of Collective Choice, Review of
Economic Studies, Vol. 44, 1977
S. 199-209
- A.B. Atkinson On the Measurement of Inequality,
Journal of Economic Theory,
Vol. 2, 1970, S. 244-263
- C.P.A. Bartels Explicit Normative Measurement of
the Degree of Income Inequality,
De Economist, Vol. 125, 1977,
S. 360-382
- C.P.A. Bartels Economic Aspects of Regional Welfare,
Income Distribution and Unemployment,
Martinus Nijhoff, Leiden, 1977
- R. Bentzel The Social Significance of Income
Distribution Statistics, The Review
of Income and Wealth, Vol. 16,
1970, S. 253-264
- C. Berge Espaces Topologiques. Fonctions
multivoques, Dunod, Paris, 1959
- C. Blackorby
D. Donaldson Measures of Relative Equality and
Their Meaning in Terms of Social
Welfare, Journal of Economic
Theory, Vol. 18, 1978, S. 59-80

- C. Blackorby
D. Donaldson A Theoretical Treatment of Indices of Absolute Equality, International Economic Review, Vol. 21, 1980, S. 107-136
- G. Blümle Zur Messung der personellen Einkommensverteilung, Schweizer Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, 1976, Heft 1, S. 45-65
- F. Bourguignon Decomposable Income Inequality Measures, Econometrica, Vol. 47 1979, S. 901-920
- H. Büning
G. Trenkler Nichtparametrische statistische Methoden, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1978
- R. Bürk
W. Gehrig Indices of Income Inequality and Societal Income. An Axiomatic Approach, in: Theory and Applications of Economic Indices, Ed. by W. Eichhorn, R. Henn, O. Opitz, R.W. Shephard, Physica Verlag, Würzburg, 1978
- D.G. Champernowne A Comparison of Measures of Inequality of Income Distribution, Economic Journal, 1974, S. 787-816
- A.C. Chiang Fundamental Methods of Mathematical Economics, 2nd. Ed., McGraw-Hill, Tokyo, 1974
- J.S. Chipman The Welfare Ranking of Pareto Distributions, Journal of Economic Theory, Vol. 9, 1974, S. 275-282
- F.A.Cowell Measuring Inequality, Philip Allan Publishers Limited, Oxford, 1977

- H. Dalton The Measurement of the Inequality of Incomes, The Economic Journal, Vol. 30, 1920, S. 348-361
- P. Dasgupta
A.K. Sen
D. Starrett Notes on the Measurement of Inequality, Journal of Economic Theory, Vol. 6, 1973, S. 180-187
- G. Debreu Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, in: Decision Processes, Ed. by R.M. Thrall, C.H. Coombs, R.L. Davis, John Wiley & Sons, New York, London, 3rd. Ed., 1960
- D. Donaldson
J.A. Weymark A Single-Parameter Generalization of the Gini-Indices of Inequality, Journal of Economic Theory, Vol. 22, 1980, S. 67-86
- W. Eichhorn Functional Equations in Economics, Addison-Wesley Publishing Company, London usw., 1978
- Ö. Eltetö
E. Frigyes New Income Inequality Measures as Efficient Tools for Causal Analysis and Planning, Econometrica, Vol. 36, 1968, S. 383-396
- F. Erwe Differential- und Integralrechnung, Band 1, Bibliographisches Institut, Mannheim, revidierter Nachdruck 1973
- J. Fellman The Effect of Transformations on Lorenz Curves, Econometrica, Vol. 44, 1976, S. 823-824
- C.E. Ferguson The Neoclassical Theory of Production and Distribution, Cambridge at the University Press, 1969

- G.S. Fields
J.C.H. Fei On Inequality Comparisons,
Econometrica, Vol. 46, 1978,
S. 303-316
- J.L. Gastwirth A General Definition of the Lorenz
Curve, Econometrica, Vol. 39, 1971,
S. 1037-1039
- J.L. Gastwirth The Estimation of the Lorenz Curve
and Gini Index, Review of Economics
and Statistics, Vol. 54, 1972,
S. 306-316
- W. Ginsberg Concavity and Quasiconcavity in
Economics, Journal of Economic
Theory, Vol. 6, 1973, S. 596-605
- H.A.J. Green Aggregation in Economic Analysis,
Princeton University Press, Prince-
ton, 1964
- U. Gruber Einkommensverteilung, Langen Müller,
München, Wien, 1974
- P.J. Hammond A Note on Extreme Inequality
Aversion, Journal of Economic
Theory, Vol. 11, 1975, S. 465-467
- P.J. Hammond Dual Interpersonal Comparisons of
Utility and the Welfare Economics
of Income Distribution, Journal of
Public Economics, Vol. 7, 1977,
S. 51-71
- H. Hesse
R. Linde Gesamtwirtschaftliche Produktions-
theorie, Teil 1, Physica-Verlag,
Würzburg, 1976
- N.C. Kakwani
N. Podder Efficient Estimation of the Lorenz
Curve and Associated Inequality
Measures from Grouped Observations,
Econometrica, Vol. 44, 1976,
S. 137-148

- N.C. Kakwani Applications of Lorenz Curves in
Economic Analysis, Econometrica,
Vol. 45, 1977, S. 719-727
- A Kats On the Social Welfare Function and
the Parameters of Income Distribu-
tion, Journal of Economic Theory,
Vol. 5, 1972, S. 377-382
- L. Kern Comparative Distributive Ethics,
in: Decision Theory and Social
Ethics, Ed. by H.W. Gottinger,
W. Leinfellner, D. Reidel Publishing
Company, Dordrecht usw., 1978
- S.-Ch. Kolm The Optimal Production of Social
Justice, in: Public Economics,
Ed. by J. Margolis, H. Guitton,
Macmillan, London usw., 1969
- S.-Ch. Kolm Unequal Inequalities I, Journal of
Economic Theory, Vol. 12, 1976,
S. 416-442
- S.-Ch. Kolm Unequal Inequalities II, Journal of
Economic Theory, Vol. 13, 1976,
S. 82-111
- Y. Kondor An Old-New Measure of Income
Inequality, Econometrica, Vol. 39,
1971, S. 1041-1042
- Y. Kondor Value Judgments Implied by the Use
of Various Measures of Income
Inequality, The Review of Income
and Wealth, Vol. 21, 1975,
S. 309-321
- H.-J. Krupp Theorie der personellen Einkommens-
verteilung, Duncker & Humblot,
Berlin, 1968

- E. Maskin A Theorem on Utilitarianism,
Review of Economic Studies, Vol. 14,
1978, S. 93-96
- F. Mehran Linear Measures of Income Inequality,
Econometrica, Vol. 44, 1976,
S. 805-809
- D. Newbery A Theorem on the Measurement of
Inequality, Journal of Economic
Theory, Vol. 2, 1970, S. 264-266
- M. Paglin The Measurement and Trend of
Inequality: A Basic Revision,
The American Economic Review,
Vol. 65, 1975, S. 598-609
- A. Peter Die Messung der personellen Ein-
kommensverteilung, Verlag Herbert
Lang & Cie AG Bern, 1969
- W. Piesch Lorenzkurve und inverse Verteilungs-
funktion, Jahrbücher für National-
ökonomie und Statistik, Bd. 185,
1971, S. 209-234
- W. Piesch Statistische Konzentrationsmaße,
J.C.B. Mohr (Paul Siebeck),
Tübingen, 1975
- A.C. Pigou Wealth and Welfare, Macmillan and
Co, London, 1912
- A.C. Pigou The Economics of Welfare, 3rd. Ed.,
Macmillan and Co, London, 1929
- G. Pyatt On the Interpretation and Disaggre-
gation of Gini Coefficients,
The Economic Journal, Vol. 86,
1976, S. 243-255

- M. Rothschild
J.E. Stiglitz Some Further Results on the
Measurement of Inequality,
Journal of Economic Theory,
Vol. 6, 1973, S. 188-204
- P.A. Samuelson Foundations of Economic Analysis,
Cambridge, Harvard University Press,
1948
- E. Schaich Lorenzfunktion und Gini-Koeffizient
in kritischer Betrachtung, Jahrbücher
für Nationalökonomie und Statistik,
Bd. 185, 1971, S. 193-208
- A.K. Sen Collective Choice and Social
Welfare, Holden-Day, San Francisco,
1970
- A.K. Sen On Economic Inequality, Clarendon
Press, Oxford, 1973
- A.K. Sen Informational Bases of Alternative
Welfare Approaches, Journal of
Public Economics, Vol. 3, 1974,
S. 387-403
- A.K. Sen On Weights and Measures: Informa-
tional Constraints in Social Welfare
Analysis, Econometrica, Vol. 45,
1977, S. 1539-1572
- A.K. Sen Ethical Measurement of Inequality:
Some Difficulties, in: Personal
Income Distribution, Ed. by W. Krel-
le, A.F. Shorrocks, North-Holland
Publishing Company, Amsterdam usw.,
1978
- E. Sheshinski Relation Between a Social Welfare
Function and the Gini Index of
Income Inequality, Journal of
Economic Theory, Vol. 4, 1972,
S. 98-100

D.M. Winch

Analytical Welfare Economics,
Penguin Education, Harmondsworth,
1973

Nachschlagewerk

Fischer-Lexikon, Mathematik 1,
Hrsg.: H. Behnke, R. Remmert,
H.-G. Steiner, H. Tietz, Fischer
Verlag, Frankfurt, 1976

Verzeichnis häufig benutzter Symbole und Abkürzungen:

$b(X)$	Dalton-Index
$B(X)$	verallgemeinerter Dalton-Index
cov	Kovarianz
$c(X)$	Atkinson-Index
$C(X)$	Sen-Index
$d(i)$	Komponente des Nettotransfervektors
D	als Vektor: Nettotransfervektor
$E_{Y,X}$	Elastizität
$f(X)$	Verteilungsmaß
$f_{M(X)}(G_g(X))$	spezifische Funktion
$f(M(X), G_g(X))$	kompatible Wohlfahrtsfunktion
$f_o(ny^F(X))$	spezifische Funktion
$g(p_i)$	Gewichtsfunktion
$G_g(X)$	lineares Verteilungsmaß
$h(x_i)$	Transformation
H	Skalierungsfunktion einer homothetischen Wohlfahrtsfunktion
I	Äquivalenzrelation (1)
$I_{y_a}^f$	Äquivalenzrelation des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung in Abhängigkeit des Parameters a
$I_{y_e}^f$	Äquivalenzrelation des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung in Abhängigkeit des Parameters e

(1) Es sind im weiteren nur diejenigen Äquivalenzrelationen aufgeführt, für die keine Ordnungsrelation R definiert wurde.

I_{lex}	Äquivalenzrelation der symmetrischen lexikographischen Erweiterung von Maxi-Min
$k(X)$	kolm-Index
K_X	Konzentrationsfläche
K_{XY}	relative Konzentrationsfläche
$L_k(X)$	Lorenz-Koeffizient
$L_X(p_i)$	Lorenz-Kurve
$m(X)$	Durchschnittseinkommen
$m_{n-k}^o(X)$	Durchschnittseinkommen der "oberen" $n-k$ Einkommensbezieher
$m_k^u(X)$	Durchschnittseinkommen der "unteren" $n-k$ Einkommensbezieher
$M(X)$	absolute Merkmalssumme
n	Zahl der Einkommensempfänger
p_i	relative Rangzahl
P	striktter Verteilungsmaßstab (1)
P_{ya}^f	strikte Ordnungsrelation des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung in Abhängigkeit des Parameters a
P_{ye}^f	strikte Ordnungsrelation des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung in Abhängigkeit des Parameters e
P_{lex}	symmetrische lexikographische Erweiterung von Maxi-Min
$q(k)$	spezifische Funktion

(1) Es werden im weiteren nur diejenigen strikten Verteilungsmaßstäbe aufgeführt, für die keine Ordnungsrelation R definiert wurde.

Q	bistochastische Matrix
R	Verteilungsmaßstab
R^{-1}	zu R inverser Verteilungsmaßstab
$R_{\mathcal{E}}$	linearer Verteilungsmaßstab
R_{Gg}	Ordnungsrelation eines linearen Maßes
R_L	Lorenz-Verteilungsmaßstab
R_{PDT}	Pigou-Dalton Transfer-Maßstab
R_{R^m}	rangerhaltender Transfer-Maßstab
R_{st}	simultaner Transfer-Maßstab
R_w	(vollständiger) normativer Verteilungsmaßstab
$R_{\emptyset}$	Durchschnittsrelation aller linearen Verteilungsmaßstäbe mit schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion
$R_{\emptyset}$	Durchschnittsrelation aller linearen Verteilungsmaßstäbe mit strikt monoton wachsender Gewichtsfunktion
$R_{\emptyset \text{ und } \emptyset}$	Durchschnittsrelation aller linearen Verteilungsmaßstäbe mit zumindest schwach monoton wachsender Gewichtsfunktion
$R_{\emptyset P}$	Durchschnittsrelation aller paretianischen Verteilungsmaßstäbe
$R_{\emptyset r}$	Durchschnittsrelation von r linearen Verteilungsmaßstäben
$R_{\emptyset U}$	Durchschnittsrelation aller utilitaristischen Verteilungsmaßstäbe
$R_{\emptyset w}$	Durchschnittsrelation aller (vollständigen) normativen Verteilungsmaßstäbe

$s_X(p_i)$	Einkommenssumme, die der p_i -te Teil der von unten kumulierten Bezieher empfängt
S	als Funktion: paretianische Wohlfahrtsfunktion
s_j	Komponentensumme des Subvektors D_j
t	Einkommenstransfer
$t_{(i)}$	Komponente des Bruttotransfervektors
$t_P^R(X)$	Verteilung, die durch r Pigou-Dalton Transfers aus X gewonnen werden kann
$t_R^R(X)$	Verteilung, die durch r rangerhaltende Transfers aus X gewonnen werden kann
T	Bruttotransfervektor
T_X	Menge aller Bruttotransfervektoren bezüglich der Verteilung X
$u(X)$	Eltetö-Frigyes Verteilungsmaß
$U_i(x_i)$	individuelle Nutzenfunktion
$v(X)$	Eltetö-Frigyes Verteilungsmaß
V	spezifische Matrix
$VL_X(p_i)$	Differenzenfunktion
$w(X)$	Eltetö-Frigyes Verteilungsmaß
$W(X)$	Wohlfahrtsfunktion
$W^0(X)$	linear homogene Wohlfahrtsfunktion
$w_{ij}(x_i, x_j)$	Grenzrate der Substitution
$x_i, x_{(i)}$	Komponente des Verteilungsvektors X, X^0
X, X^0	ungeordneter, geordneter Verteilungsvektor
X_E	extreme Gleichverteilung

X_u	extreme Ungleichverteilung
$y^f(X)$	Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung
$y^F(X)$	verallgemeinertes Äquivalenzeinkommen bei Gleichverteilung
$y_i, y(i)$	Komponente des Verteilungsvektors Y, Y^0
Y, Y^0	ungeordneter, geordneter Verteilungsvektor
$z_i, z(i)$	Komponente des Verteilungsvektors Z, Z^0
Z, Z^0	ungeordneter, geordneter Verteilungsvektor
$\Gamma(G_g(X))$	im Einheitsintervall normierte Funktion des linearen Maßes $G_g(X)$
Π	Permutationsmatrix
$\Pi(X)$	Permutationsmatrix, die X in X^0 überführt
σ	Substitutionselastizität
$\Psi[W(X)]$	strikt monoton wachsende Transformation der Wohlfahrtsfunktion $W(X)$
$\Phi(H(X), G_g(X))$	spezifische Darstellung des Äquivalenzeinkommens bei Gleichverteilung
Ψ	Skalierungsfunktion
$\Rightarrow$	Implikation
$\Leftrightarrow$	(logische) Äquivalenz
$\in$	Element von .
$\forall$	"für alle"
$\exists$	"es gibt (wenigstens) ein"
D	Differenzenoperator

Lebenslauf

Geburtsdatum: 1. März 1952

Geburtsort: Bad Aibling

Eltern: Hans-Hellmut Nierhaus (tödlich verunglückt 1956)
Margarete Nierhaus, geb. Hesse

1958 - 1962 Volksschule Schwindstraße München

1962 - 1971 Oskar-von-Miller-Gymnasium München
(neusprachlich)

1971 Abitur

1971 - 1976 Studium der Volkswirtschaft an der
Ludwig-Maximilians-Universität München

1976 Diplom-Prüfung Volkswirtschaft
(Herbsttermin)

Seit 1.2. 1977 Verwalter der Dienstgeschäfte eines
wissenschaftlichen Assistenten an
der Volkswirtschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

